SET-4

Series SSO

कोड नं.
Code No. **65(B)**

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **12** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **26** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **12** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **26** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

(केवल नेत्रहीन परीक्षार्थियों के लिए)

MATHEMATICS

(FOR BLIND CANDIDATES ONLY)

निर्धारित समय : 3 घण्टे | *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours | *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।

(ii) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न–पत्र में **26** प्रश्न हैं ।

(iii) खण्ड अ के प्रश्न सं. **1 – 6** तक अति लघु-उत्तर वाले प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **1** अंक निर्धारित है ।

(iv) खण्ड ब के प्रश्न सं. **7 – 19** तक दीर्घ-उत्तर I प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **4** अंक निर्धारित हैं ।

(v) खण्ड स के प्रश्न सं. **20 – 26** तक दीर्घ-उत्तर II प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **6** अंक निर्धारित हैं ।

(vi) उत्तर लिखना प्रारम्भ करने से पहले कृपया प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखिए ।

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *Please check that this question paper contains* ***26*** *questions.*

(iii) *Questions No.* ***1 – 6*** *in Section A are very short-answer type questions carrying* ***1*** *mark each.*

(iv) *Questions No.* ***7 – 19*** *in Section B are long-answer I type questions carrying* ***4*** *marks each.*

(v) *Questions No.* ***20 – 26*** *in Section C are long-answer II type questions carrying* ***6*** *marks each.*

(vi) *Please write down the serial number of the question before attempting it.*

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 6 तक प्रत्येक प्रश्न का 1 अंक है ।

Question numbers 1 to 6 carry 1 mark each.

1. यदि बिंदुओं A तथा B के स्थिति सदिश क्रमश: $2\vec{a} + 3\vec{b}$ तथा $3\vec{a} - 4\vec{b}$ हैं तथा बिंदु P, AB को 3 : 2 के अनुपात में बाँटता है तथा Q, AP का मध्यबिंदु है, तो Q का स्थिति सदिश लिखिए ।

The position vectors of points A and B are $2\vec{a} + 3\vec{b}$ and $3\vec{a} - 4\vec{b}$ respectively and P divides AB in the ratio of 3 : 2 and Q is the mid-point of AP. Write the position vector of point Q.

2. यदि सदिश $\vec{a} = \lambda\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, सदिश $\vec{b} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} - \hat{k}$ पर लंबवत् है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए ।

If the vector $\vec{a} = \lambda\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ and vector $\vec{b} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} - \hat{k}$ are perpendicular, then find the value of λ.

3. यदि मूल-बिंदु से एक समतल पर डाले गए लम्ब का पाद-बिंदु P(3, 4, 2,) है, तो उस समतल का कार्तीय समीकरण लिखिए ।

If P(3, 4, 2) is the foot of the perpendicular from the origin to a plane, then write the Cartesian equation of the plane.

4. यदि $\Delta = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ है, तो अवयव a_{23} का सहखंड लिखिए ।

If $\Delta = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$, then write the cofactor of element a_{23}.

5. यदि A तथा B अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 2y\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ के क्रमशः कोटि तथा घात हैं, तो (A+B) का मान लिखिए ।

If A and B are order and degree respectively of the differential equation $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 2y\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, write the value of (A+B).

6. वक्रों $y = ax + x^2$ को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ a एक स्वेच्छ अचर है ।

Find the differential equation representing the curves $y = ax + x^2$, where a is an arbitrary constant.

खण्ड ब

SECTION B

प्रश्न संख्या 7 से 19 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।

Question numbers 7 to 19 carry 4 marks each.

7. गाँवों में स्त्रियों को शौचालय उपलब्ध कराने की सुविधा को प्रोत्साहित करने के लिए, एक गैर-सरकारी संगठन ने एक विज्ञापन एजेंसी को किराये पर लिया । उसने लोगों में इस विषय में जागरूकता बढ़ाने के लिए घर-घर जाना, पत्राचार तथा भोंपू (speaker)/ढिंढोरे का सहारा लिया । इन संसाधनों द्वारा संचारण का व्यय निम्न प्रदत्त है :

प्रति संचारण/	घर-घर जाना (भेंट)	पत्राचार	ढिंढोरे/भोंपू का प्रयोग
भेंट का व्यय (₹ में)	10	5	15

X, Y, Z तीन गाँवों में किए गए प्रयासों की संख्या निम्न हैं :

गाँव	घर-घर भेंट	पत्राचार	ढिंढोरे/भोंपू का प्रयोग
X	200	400	200
Y	350	600	300
Z	225	375	150

गैर-सरकारी संगठन द्वारा अलग-अलग तीनों गाँवों में इस विषय में समाज को जागरूक करने के लिए किया गया कुल व्यय आव्यूह के प्रयोग से ज्ञात कीजिए ।

गैर-सरकारी संगठन के इस प्रयास द्वारा समाज में जनित होने वाला एक मूल्य लिखिए ।

To promote the making of toilets for ladies (women) in villages, an N.G.O. hired an advertising agency for generating awareness for the cause through house calls, letters and announcements through speakers. The cost per mode of communication is given below :

Cost per visit/communication (in ₹)	House calls	Letters	Announcements (speakers)
	10	5	15

The number of contacts made were as follows in the three villages X, Y and Z :

Village	Houses visited	Letters dropped	Number of announcements
X	200	400	200
Y	350	600	300
Z	225	375	150

Find the total expenditure incurred by the N.G.O. for the three villages separately for making the community aware of the cause using matrices.

Also write the value generated in the general public by the agency.

8. यदि $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ है तथा $A^2 - \lambda A + \mu I = O$ है, तो λ तथा μ के मान ज्ञात कीजिए ।

अथवा

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ है, तो adj (A) ज्ञात कीजिए तथा दर्शाइए कि $A\,(\text{adj } A) = |A|\,I$.

If $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ and $A^2 - \lambda A + \mu I = O$, then find the values of λ and μ.

OR

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, find adj (A) and show that $A\,(\text{adj } A) = |A|\,I$.

9. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a^3$$

Using the properties of determinants, prove the following :

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a^3$$

10. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x)\, dx$$

Evaluate :

$$\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x)\, dx$$

11. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{1 + \cos x}\, e^{-x/2}\, dx;\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6}\, dx$$

Evaluate :

$$\int \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{1 + \cos x}\, e^{-x/2}\, dx;\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

OR

Evaluate :

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6}\, dx$$

12. एक बक्से में 10 कार्ड, 1 से 10 तक के पूर्णांक लिखकर, रखे गए हैं और उन्हें अच्छी तरह मिलाया गया है । इस बक्से से एक कार्ड यादृच्छया निकाला गया । यदि यह ज्ञात हो कि निकाले गए कार्ड पर संख्या '5 से अधिक' है, तो इस संख्या के सम होने की क्या प्रायिकता है ?

Ten cards, numbered 1 to 10 are placed in a box, mixed up thoroughly and then one card is drawn randomly. If it is known that the number on the drawn card is 'more than 5', what is the probability that it is an even number ?

13. दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाण ज्ञात कीजिए, यदि उनके परिमाण समान हैं और इनके बीच का कोण 60° है तथा इनका अदिश गुणनफल $\frac{1}{2}$ है ।

Find the magnitude of two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$, having the same magnitude and such that the angle between them is 60° and their scalar product is $\frac{1}{2}$.

14. रेखाओं l_1 तथा l_2, जिनके सदिश समीकरण निम्न हैं, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए :

$$l_1 : \vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}),\ l_2 : \vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}).$$

Find the shortest distance between the lines l_1 and l_2, whose vector equations are given below :

$$l_1 : \vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}),\ l_2 : \vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}).$$

15. यदि $y = \cot^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\sin y = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

अथवा

x के लिए हल कीजिए :

$$\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \tan^{-1}(-7)$$

If $y = \cot^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right)$, prove that $\sin y = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

OR

Solve for x :

$$\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \tan^{-1}(-7)$$

16. यदि $y = (3 \cot^{-1} x)^2$ है, तो दर्शाइए कि

$$\left(x^2+1\right)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x\left(x^2+1\right)\frac{dy}{dx} = 18.$$

अथवा

दर्शाइए कि फलन $f(x) = |x-3|$, $x \in R$, $x = 3$ पर सतत है परन्तु अवकलनीय नहीं है ।

If $y = (3 \cot^{-1} x)^2$, show that

$$\left(x^2+1\right)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x\left(x^2+1\right)\frac{dy}{dx} = 18.$$

OR

Show that the function $f(x) = |x - 3|$, $x \in R$, is continuous but not differentiable at $x = 3$.

17. यदि $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x + x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

If $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x + x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, find $\frac{dy}{dx}$.

18. वक्र $y = (x - 2)^2$ पर वह बिंदु ज्ञात कीजिए जिस पर खींची गयी स्पर्श-रेखा बिंदुओं (2, 0) और (4, 4) को मिलाने वाली जीवा के समांतर है । स्पर्श-रेखा का समीकरण भी ज्ञात कीजिए ।

Find a point on the curve $y = (x - 2)^2$ at which the tangent is parallel to the chord joining the points (2, 0) and (4, 4). Also find the equation of the tangent.

19. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int (6x+5)\sqrt{6+x-x^2}\ dx$$

Evaluate :

$$\int (6x+5)\sqrt{6+x-x^2}\ dx$$

खण्ड स

SECTION C

प्रश्न संख्या 20 से 26 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Question numbers 20 to 26 carry 6 marks each.

20. माना $\mathbb{R}$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ द्वारा प्रदत्त है तथा $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ द्वारा प्रदत्त है, तो ज्ञात कीजिए :

(i) fog
(ii) fof
(iii) gog

अथवा

माना A तथा B दो समुच्चय हैं । दर्शाइए कि $f : A \times B \to B \times A$ जो इस प्रकार प्रदत्त है : $f(a, b) = (b, a)$ एक एकैकी-आच्छादक फलन है ।

Let $\mathbb{R}$ be the set of real numbers and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is given by $f(x) = 3x + 2$ and $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is given by $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, then find

(i) fog
(ii) fof
(iii) gog

OR

Let A and B be two sets. Show that $f : A \times B \to B \times A$ such that $f(a, b) = (b, a)$ is a bijective function.

21. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ तथा कोटियों $x = 0$ और $x = ae$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ $b^2 = a^2 (1 - e^2)$ एवं $e < 1$ है ।

Find the area bounded by the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ and the ordinates $x = 0$ and $x = ae$, where $b^2 = a^2 (1 - e^2)$, and $e < 1$.

22. निम्न अवकल समीकरण का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए :

$x \cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$, दिया है कि जब $x = 1$ है, तो $y = \frac{\pi}{4}$ है ।

अथवा

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए ।

Find the particular solution of the differential equation

$x \cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$, given that $y = \frac{\pi}{4}$, when $x = 1$.

OR

Find the general solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$.

23. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$, तथा $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$ की प्रतिच्छेदन रेखा तथा बिंदु (2, 1, 3) से होकर जाता है ।

Find the vector equation of the plane passing through the intersection of the planes $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$, $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$ and through the point (2, 1, 3).

24. दो थैले I और II दिए गए हैं । थैले I में 3 लाल और 4 काली गेंदें हैं जबकि थैले II में 5 लाल और 6 काली गेंदें हैं । किसी एक थैले में से यादृच्छया एक गेंद निकाली गई जो कि काले रंग की है । इस बात की क्या प्रायिकता है कि वह थैले II में से निकाली गई है ?

Two bags I and II are given. Bag I contains 3 red and 4 black balls while bag II contains 5 red and 6 black balls. A ball is drawn at random from one of the bags and is found to be black. Find the probability that it was drawn from bag II.

25. कमलेश ₹ 50,000 तक की राशि का निवेश करना चाहती है । मार्किट में दो प्रकार के बाँड, A तथा B उपलब्ध हैं । बाँड A में निवेशित राशि पर 10% लाभ (निवेश पर प्रतिफल) जबकि बाँड B में निवेशित राशि पर 15% लाभ मिलता है । उसने बाँड A में कम-से-कम ₹ 15,000 निवेश करने का निश्चय किया लेकिन वह बाँड B में ₹ 20,000 से अधिक राशि का निवेश नहीं करना चाहती । दोनों बाँडों में वह कितनी-कितनी राशि निवेशित करे कि उसे अधिकतम लाभ हो ? उपर्युक्त प्रश्न को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबध (formulate) कीजिए ।

Kamlesh wants to invest an amount up to ₹ 50,000. In the market, two types of Bonds A and B are available – Bond A offering 10% return on the investment and Bond B pays 15% on the amount invested. She wants to invest at least ₹ 15,000 in Bond A and not more than ₹ 20,000 in Bond B. How should she plan the investment in the two bonds to get maximum return on the investment ? Formulate the above as a linear programming problem.

26. ऐसी दो धन संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योगफल 16 हो तथा जिनके घनों का योगफल न्यूनतम हो ।

Find two such positive numbers whose sum is 16 and the sum of whose cubes is minimum.

Strictly Confidential — (For Internal and Restricted Use Only)

Senior School Certificate Examination

March — 2015

Marking Scheme — Mathematics 65(B)

General Instructions :

1. The Marking Scheme provides general guidelines to reduce subjectivity in the marking. The answers given in the Marking Scheme are suggestive answers. The content is thus indicative. If a student has given any other answer which is different from the one given in the Marking Scheme, but conveys the meaning, such answers should be given full weightage.

2. Evaluation is to be done as per instructions provided in the marking scheme. It should not be done according to one's own interpretation or any other consideration — Marking Scheme should be strictly adhered to and religiously followed.

3. Alternative methods are accepted. Proportional marks are to be awarded.

4. In question(s) on differential equations, constant of integration has to be written.

5. If a candidate has attempted an extra question, marks obtained in the question attempted first should be retained and the other answer should be scored out.

6. A full scale of marks - 0 to 100 has to be used. Please do not hesitate to award full marks if the answer deserves it.

7. Separate Marking Scheme for all the three sets has been given.

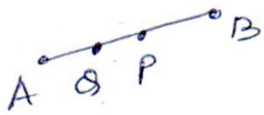
QUESTION PAPER CODE 65(B)

EXPECTED ANSWERS/VALUE POINTS

SECTION - A

Marks

1. P.V. of $P = \dfrac{13\vec{a} - 6\vec{b}}{5} \left(\because \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{3}{2} \right)$ ½ m



P.V. of $Q = \dfrac{23}{10}\vec{a} + \dfrac{9}{10}\vec{b} \left(\because \dfrac{AQ}{QP} = \dfrac{1}{1} \right)$ ½ m

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ as $\vec{a} \perp \vec{b}$ ½ m

$2\lambda - 3\lambda - 5 = 0$

$\Rightarrow \lambda = -5$ ½ m

3. D.R. of normal to plane 3 , 4 , 2 ½ m

Also point (3, 4, 2) lies on plane

$$3x + 4y + 2z + d = 0$$

$$\Rightarrow \quad d = -29$$

So cartesian Equation of plane is

$$3x + 4y + 2z - 29 = 0$$ ½ m

4. $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

$a_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3$ 1 m

5. Order = 2 ½ m

or Degree = 1

So A + B = 3 ½ m

6. $y = ax + x^2$

$y_1 = a + 2x$

$y_1 - 2x = a$ ½ m

So $y = (y_1 - 2x)\,x + x^2$

$\Rightarrow \quad xy_1 = y + x^2$ ½ m

SECTION - B

7. Total Expenditure incurred for villages x, y, z

are

$$\begin{bmatrix} 200 & 400 & 200 \\ 350 & 600 & 300 \\ 225 & 375 & 150 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7000 \\ 11,000 \\ 6375 \end{bmatrix}$$ 2 m

So Expenditure on village x = ₹ 7000
So Expenditure on village y = ₹ 11,000
So Expenditure on village z = ₹ 6375 1 m

Value : Sensitization about hygehic habits ..... or Any other relevant value 1 m

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ 1 m

$A^2 - \lambda A + \mu I = 0$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 2\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1 m

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5 - 2\lambda + \mu = 0 \\ -4 + \lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = 4 \\ \mu = 3 \end{array}$ 1 m 1 m

OR

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1$$ 1 m

$c_{11} = 7 \quad c_{21} = -3 \quad c_{31} = -3$

$c_{12} = -1 \quad c_{22} = 1 \quad c_{32} = 0$

$c_{13} = -1 \quad c_{23} = 0 \quad c_{33} = 1$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 1½ m

$$A \cdot (\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ½ m

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{.....................................} \text{(i)}$$

Since $|A| = 1$

$$\text{So } |A| \; I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{....................................} \text{(ii)}$$ ½ m

from (i) & (ii)

$A \cdot (\text{adj } A) = |A| I$ ½ m

9. $\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}$

$$R_2 \to R_2 - 2R_1, \quad R_3 \to R_3 - 3R_1$$

$= \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix}$ 3 m

$= a \begin{vmatrix} a & 2a+b \\ 3a & 7a+3b \end{vmatrix}$

$= a^2 \begin{vmatrix} 1 & 2a+b \\ 3 & 7a+3b \end{vmatrix}$

$= a^2 \left(7a+3b-6a-3b\right)$

$= a^3$ 1 m

10. $I = \int_0^{\pi/4} \log\left(1+\tan x\right) dx$

$= \int_0^{\pi/4} \log\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right) dx$ 1 m

$= \int_0^{\pi/4} \log\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right) dx$

$= \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1+\tan x}\right) dx$ 1 m

$= \int_0^{\pi/4} \left(\log 2 - \log\left(1+\tan x\right)\right) dx$

$$I = \int_0^{\pi/4} \log 2 \, dx - I$$ 1 m

$$2I = \frac{\pi}{4} \log 2$$

or $I = \frac{\pi}{8} \log 2$ 1 m

11. $\int \frac{\sqrt{1-\sin x}}{1+\cos x} \cdot e^{-x/2} dx \; ; \; 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

$$= \int \frac{-\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \cdot e^{-x/2} dx$$ 1 m

$$= \frac{1}{2} \int \left(-\sec \frac{x}{2} \tan \frac{x}{2} + \sec \frac{x}{2} \right) e^{-x/2} dx$$ 1 m

Put $-\frac{x}{2} = t$

$\Rightarrow \frac{-1}{2} dx = dt$

$$= -\int (\sec t + \sec t \tan t) \, e^t dt$$

$$= -e^t \sec t + c$$ 1 m

$$= -e^{-x/2} \sec \left(\frac{-x}{2} \right) + c$$

$$= -e^{-x/2} \sec \left(\frac{x}{2} \right) + c$$ 1 m

OR

$$\int \frac{x^2+1}{x^2 - 5x + 6} \, dx$$

$= \int \left(1 + \frac{5x-5}{x^2 - 5x + 6}\right) dx = \int \left(1 + \frac{5x-5}{(x-2)(x-3)}\right) dx$ 1 m

$= \int dx + \int \frac{-5}{x-2}\, dx + \int \frac{10}{x-3}\, dx$ 1½ m

$= x - 5\log|x-2| + 10\log|x-3| + c$ 1½ m

12. S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Event A: No. on card is 'more than 5' 1 m

A = {6, 7, 8, 9, 10}

Event B: Even no. on card

B = {2, 4, 6, 8, 10}

$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ 1 m

$= \frac{3/10}{5/10} = 3/5$ 2 m

13. Given $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

$\cos\theta = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, θ angle between $\vec{a}$ & $\vec{b}$ 1 m

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$

Use $\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\frac{1}{2}}{|\vec{a}|^2}$

$\Rightarrow \ |\vec{a}|^2 = 1$

$\Rightarrow \ |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ 2 m

14. $\vec{r_1} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda\left(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right)$

$\vec{r_2} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu\ \left(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}\right)$

S.D. between $\vec{r_1}$ & $\vec{r_2}$ $= \left|\dfrac{\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c}\times\vec{d}}{|\vec{c}\times\vec{d}|}\right|$ 1 m

$\left(\vec{b} - \vec{a}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$ 1 m

$= 10$

$\vec{c}\times\vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$

$= 3\hat{i} - \hat{j} - 7\hat{k}$

$\left|\vec{c}\times\vec{d}\right| = \sqrt{59}$ 1 m

Hence S.D. $= \left|\dfrac{10}{\sqrt{59}}\right| = \dfrac{10}{\sqrt{59}}$ units 1 m

15. $y = \cot^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right)$

$y = \dfrac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right) \ \because \left(\cot^{-1}x + \tan^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}\right)$ 1 m

or $y - \dfrac{\pi}{2} = -2\tan^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right)$

or $\frac{\pi}{2} - y = \cos^{-1}\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) \quad \left(\because\ 2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)$ 1 m

or $\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{2\sin^2 x/2}{2\cos^2 x/2}$ 1 m

or $\sin y = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$ 1 m

Hence proved

OR

$$\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \tan^{-1}(-7)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x}}{1-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(\frac{x-1}{x}\right)}\right) = \tan^{-1}(-7)$$ 1 m

or $\tan^{-1}\left(\frac{2x^2+1-x}{1-x}\right) = \tan^{-1}(-7)$ 1 m

or $2x^2+1-x = -7(1-x)$ ½ m

or $2x^2 - 8x + 8 = 0$

or $(x-2)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 2$ 1 m

since $x = 2$ does not satisfy the given equation.

Hence no solution ½ m

16. $y = \left(3\cot^{-1}x\right)^2$

$y_1 = 2\left(3\cot^{-1}x\right)\left(\dfrac{-3}{1+x^2}\right)$

$= -18\,\dfrac{\cot^{-1}x}{1+x^2}$ 2 m

or $y_1\left(1+x^2\right) = -18\cot^{-1}x$

or $y_2\left(1+x^2\right) + 2\,xy_1 = \dfrac{18}{1+x^2}$ 1 m

or $y_2\left(1+x^2\right)^2 + 2\,x\left(1+x^2\right)y_1 = 18$ 1 m

OR

$f(x) = |x-3|, \quad x \in R$

$f(x) = x-3, \quad x \geq 3$

$= -(x-3), \quad x < 3$

To show continuity

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^-} f(x) = f(3)$ 1 m

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3} x-3 = 0$

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3} -(x-3) = 0$

$f(3) = 3-3 = 0$

So f(x) is continuous at x = 3 1 m

For derivability at x = 3 need to show that

R.H.D = LHD

In this case

$$\text{R.H.D}\,(3) = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\text{L.H.D}\,(3) = \lim_{h\to 0} \frac{h}{-h} = -1$$ 1 m

So func is not differentiable at $x = 3$ 1 m

17. $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x + x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

or $y = e^{x \log\left(x+\frac{1}{x}\right)} + e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\log x}$ 1 m

$$\frac{dy}{dx} = e^{x \log\left(x+\frac{1}{x}\right)} \left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}} \right]$$

$$+\ e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\log x} \left[\left(\frac{-1}{x^2}\right)\log + \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right) \right]$$

$$= \left(x+\frac{1}{x}\right)^x \left[\log\left(x+\frac{1}{x}\right) + \frac{x^2-1}{x^2+1} \right]$$ 1½+1½ m

$$+\ (x)^{\left(1+\frac{1}{x}\right)} \left[\frac{x^2+1-\log x}{x^2} \right]$$

18. $y = (x-2)^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2\,(x-2)$$ 1 m

Let (x_1, y_1) be the point of contact

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,\, y_1)} = 2\,(x_1 - 2)$$

Slope of chord = $m = \dfrac{4-0}{4-2} = 2$

$$2\,(x_1 - 2) = 2$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 3$$

since (x_1, y_1) lies on curve $y = (x-2)^2$

So $\; y_1 = (3-2)^2 = 1$

So point of contact is (3, 1) 2 m

Also, equation of tangent is

$$y - 1 = 2\,(x - 3)$$

or $\quad y - 2x + 5 = 0$ 1 m

19. $I = \int (6x+5)\,\sqrt{6+x-x^2}\,dx$

$$6x + 5 = A\,(1-2x) + B$$

$\Rightarrow \quad A = -3, \quad B = 8$ 1 m

So, $I = -3\int (1-2x)\,\sqrt{6+x-x^2}\,dx + 8\int \sqrt{6+x-x^2}\,dx$

$= -2\left(6+x-x^2\right)^{3/2} + 8\int \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}\,dx$ 1 m

$= -2\left(6+x-x^2\right)^{3/2} + \frac{8}{4}\left(\left(2x-1\right)\sqrt{6+x-x^2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{5}\right)\right)$ 1 m

$= -2\left(6+x-x^2\right)^{3/2} + 2\left(\left(2x-1\right)\sqrt{6+x-x^2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{5}\right)\right) + c$ 1 m

SECTION - C

20. $f\,(x) = 3x + 2, \quad f : R \to R$

$$g\,(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad g : R \to R$$

(i) $\text{fog}(x) = f(g(x)), \quad \text{fog}: R \to R$

$$= f\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

$$= 3\left(\frac{x}{x^2+1}\right)+2$$

$$= \frac{2x^2+3x+2}{x^2+1}$$ 2 m

(ii) $\text{fof}(x) = f(f(x)), \quad \text{fof}: R \to R$

$$= f(3x+2)$$

$$= 3(3x+2)+2$$

$$= 9x+8$$ 2 m

(iii) $\text{gog}(x) = g(g(x)), \quad \text{gog}: R \to R$

$$= g\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{x^2+1}}{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2+1} = \frac{x(x^2+1)}{3x^2+1+x^4}$$

$$= \frac{x(x^2+1)}{x^4+3x^2+1}$$ 2 m

OR

$f: A \times B \to B \times A$ s.t.

$f(a, b) = (b, a)$

To show f is one – one

Let $(a, b,)$ & (c, d) be any arbitrany element in $A \times B$ s.t.

$a \neq c, \quad a, c \in A$

$b \neq d, \quad b, d \in B$

then $f(a, b) = (b, a)$

$f(c, d) = (d, c)$

$(b, a) \neq (d, c) \quad (\because b \neq d, a \neq c)$

$\Rightarrow f(a, b) \neq f(c, d)$

$\Rightarrow$ f is one – one .... (i) 2 m

f is onto

$\forall \; a \in A, \; b \in B,$

$(b, a) \in B \times A$

$\Rightarrow (a, b) \in A \times B$

So f is onto .... (ii) 1 m

Hence, from (i) & (ii)

f is bijective function 1 m

21. Area $= \; = \int_0^{ae} y \, dx$

$= 2 \int_0^{ae} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$ 1 m

$= \frac{2b}{a} \int_0^{ae} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$ 1 m

$= \frac{2b}{a} \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \right]_0^{ae}$ 2 m

$$= \frac{2b}{a}\left[\frac{ae}{2}\sqrt{a^2(1-e^2)} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}e\right] - 0$$ 1 m

$$= b\left[eb + a\sin^{-1}e\right]$$

or $b^2e + ab\sin^{-1}e$ 1 m

22. $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$

or $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sec\left(\frac{y}{x}\right)$ 1 m

Put $y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ 1 m

$$x\frac{dv}{dx} = \sec v$$

$\cos v\, dv = \frac{dx}{x}$ 1 m

$$\Rightarrow \int \cos v\, dv = \int \frac{dx}{x}$$

or $\sin v = \log|x| + c$ 1 m

when $y = \frac{\pi}{4},\ x = 1$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \log 1 + c$ 1 m

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Particular solution is $\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \log|x| + \frac{1}{\sqrt{2}}$ 1 m

OR

$$\frac{dy}{dx} - y = \cos x$$

I.F. $= e^{\int -dx} = e^{-x}$ $\left(\text{Here } P = -1, Q = \cos x \text{ and equation is in form } \frac{dy}{dx} + Py = Q(x)\right)$ 1 m

So general solution is

$y \cdot e^{-x} = \int e^{-x} \cos x \, dx + c$ .... (i) 1 m

consider

$I = \int e^{-x} \cos x \, dx = -\cos x \, e^{-x} + \int \left(-\sin x \cdot e^{-x}\right) dx$

$= -\cos x \cdot e^{-x} - \left[-\sin x \cdot e^{-x} + \int \cos x \, e^{-x} \, dx\right]$ 2 m

$2 I = \left(-\cos x + \sin x\right) e^{-x} + c$

$I = \left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right) e^{-x} + c$ .... (ii) 1 m

From (i) & (ii), general solution of given D.E. is

$y \cdot e^{-x} = \left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right) e^{-x} + c$ 1 m

or $2y = \sin x - \cos x + ce^{x}$

23. Given planes are

$2x + 2y - 3z - 7 = 0$

and $2x + 5y + 3z - 9 = 0$

Equation of plane passing through intersection of two given planes is

$(2x + 2y - 3z - 7) + k\,(2x + 5y + 3z - 9) = 0$ 1½ m

or $(2+ 2k)\,x + (2 + 5k)\,y + (-3 + 3k) = -7 - 9\,k = 0$ 1 m

This plane passes through point (2, 1, 3)

So $(2 + 2k)\,(2) + (2 + 5k)\,(1) + (-3 + 3k)\,(3) - 7 - 9k = 0$

$-10 + 9k = 0$ 2 m

or $k = \dfrac{10}{9}$

So equation of plane is

$$\left(2 + 2\left(\frac{10}{9}\right)\right)x + \left(2 + \frac{5(10)}{9}\right)y + \left(-3 + \frac{3(10)}{9}\right)z - 7 - \frac{9(10)}{9} = 0$$

$38x + 68y + 3k - 153 = 0$ 1 m

Hence vec. equ. of plane passing through the intersection of plane is

$\vec{r} \cdot \left(38\hat{i} + 68\hat{j} + 3\hat{k}\right) = 153$ ½ m

24. E_1 : Ball from bag I

E_2 : Ball from bag II 1 m

E_3 : Drawing black ball

$P(E_1) = P(E_2) = \dfrac{1}{2}$

$P(B/E_1) = \dfrac{4}{7}$, $P(B/E_2) = \dfrac{6}{11}$ 2 m

Prob. of ball drawn found to be black, drawn from bag II

$$P(E_2/B) = \frac{P(E_2) \cdot P(B/E_2)}{P(E_1) \cdot P(B/E_1) + P(E_2) \cdot P(B/E_2)}$$ 1 m

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{6}{11}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{6}{11}\right)} = \frac{21}{43}$$ +1 m

25.		Returns	Investment
	Bond A	10%	x
	Bond B	15%	y

L.P.P. is

objective func. $z = \frac{10}{100}x + \frac{15}{100}y = 0.1\,x + 0.15\,y$ 2 m

Subject to

$x + y \leq 50{,}000$ 1 m

$x \geq 15{,}000$ 1 m

$y \leq 20{,}000$ 1 m

$x, y \geq 0$ +1 m

26. Let the two numbers be x and y

$x + y = 16$

$f(x) = x^3 + y^3$

$= x^3 + (16 - x)^3$ 1½ m

$f'(x) = 3x^2 + 3\,(16 - x)^2\,(-1)$

$= 96x - 768$ 1½ m

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 8$ 1 m

So x = 8 may be point of maximum or minimum

consider $f''(x) = 96 > 0$ 1 m

$\Rightarrow$ x = 8 is point of minima

when x = 8, y = 8

So 8 and 8 are numbers such that their sum is 16 and

sum of their cubes is minimum. 1 m