SET-1

Series SSO

कोड नं.
Code No. **65/1/P**

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **12** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **26** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **12** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **26** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे | *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours | *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न–पत्र में* ***26*** *प्रश्न हैं ।*

(iii) *खण्ड अ के प्रश्न* ***1 – 6*** *तक अति लघु-उत्तर वाले प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए* ***1*** *अंक निर्धारित है ।*

(iv) *खण्ड ब के प्रश्न* ***7 – 19*** *तक दीर्घ-उत्तर I प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए* ***4*** *अंक निर्धारित हैं ।*

(v) *खण्ड स के प्रश्न* ***20 – 26*** *तक दीर्घ-उत्तर II प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए* ***6*** *अंक निर्धारित हैं ।*

(vi) *उत्तर लिखना प्रारम्भ करने से पहले कृपया प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखिए ।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *Please check that this question paper contains* ***26*** *questions.*

(iii) *Questions* ***1 – 6*** *in Section A are very short-answer type questions carrying* ***1*** *mark each.*

(iv) *Questions* ***7 – 19*** *in Section B are long-answer I type questions carrying* ***4*** *marks each.*

(v) *Questions* ***20 – 26*** *in Section C are long-answer II type questions carrying* ***6*** *marks each.*

(vi) *Please write down the serial number of the question before attempting it.*

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 6 तक प्रत्येक प्रश्न का 1 अंक है ।

Question numbers 1 to 6 carry 1 mark each.

1. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} लिखिए ।

If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, then write A^{-1}.

2. वह अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = cx + c^2$ को निरूपित करता है ।

Find the differential equation representing the curve $y = cx + c^2$.

3. निम्न अवकल समीकरण का समाकलन गुणक लिखिए :

$$(1 + y^2)\, dx - (\tan^{-1} y - x)\, dy = 0$$

Write the integrating factor of the following differential equation :

$$(1 + y^2)\, dx - (\tan^{-1} y - x)\, dy = 0$$

4. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$ का मान लिखिए ।

Write the value of $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$.

5. यदि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{c} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$ है, तो $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

If $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{c} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$, then find the value of $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

6. निम्न रेखा के दिक्-अनुपातों को लिखिए :

$$x = -3, \quad \frac{y-4}{3} = \frac{2-z}{1}$$

Write the direction ratios of the following line :

$$x = -3, \quad \frac{y-4}{3} = \frac{2-z}{1}$$

खण्ड ब

SECTION B

प्रश्न संख्या 7 से 19 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।
Question numbers 7 to 19 carry 4 marks each.

7. एक अनाथालय के लिए धन एकत्रित करने हेतु, तीन विद्यालयों A, B तथा C के विद्यार्थियों ने एक प्रदर्शनी अपने मोहल्ले में आयोजित की । उन्होंने इस प्रदर्शनी में पुन: चक्रित कागज़ से बने कागज़ के थैले, स्क्रैप-पुस्तकें एवं हल्का रंगीन पेस्टल कागज़ क्रमश: ₹ 20, ₹ 15 और ₹ 5 प्रति इकाई से बेचा है । विद्यालय A ने 25 कागज़ के थैले, 12 स्क्रैप-पुस्तकें एवं 34 हल्के रंगीन पेस्टल कागज़ बेचे, विद्यालय B ने 22 कागज़ के थैले, 15 स्क्रैप-पुस्तकें एवं 28 हल्के रंगीन पेस्टल कागज़ और विद्यालय C ने 26 कागज़ के थैले, 18 स्क्रैप-पुस्तकें एवं 36 हल्के रंगीन पेस्टल कागज़ बेचे । आव्यूहों का प्रयोग करके, यह ज्ञात कीजिए कि इन विद्यार्थियों ने प्रति विद्यालय कितना धन अर्जित किया ।

इस प्रकार की प्रदर्शनी के आयोजन से विद्यार्थियों में किन मूल्यों का जनन होता है ?

To raise money for an orphanage, students of three schools A, B and C organised an exhibition in their locality, where they sold paper bags, scrap-books and pastel sheets made by them using recycled paper, at the rate of ₹ 20, ₹ 15 and ₹ 5 per unit respectively. School A sold 25 paper bags, 12 scrap-books and 34 pastel sheets. School B sold 22 paper bags, 15 scrap-books and 28 pastel sheets while School C sold 26 paper bags, 18 scrap-books and 36 pastel sheets. Using matrices, find the total amount raised by each school.

By such exhibition, which values are generated in the students ?

8. सिद्ध कीजिए :

$$2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a\cos x + b}{a + b\cos x}\right)$$

अथवा

निम्नलिखित को x के लिए हल कीजिए :

$$\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{x-3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+2}{x+3}\right) = \frac{\pi}{4},\ |x|<1.$$

Prove that :

$$2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a\cos x + b}{a + b\cos x}\right)$$

OR

Solve the following for x :

$$\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{x-3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+2}{x+3}\right) = \frac{\pi}{4},\ |x|<1.$$

9. यदि $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ है, तो $A^2 - 5A + 16I$ ज्ञात कीजिए ।

If $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, find $A^2 - 5A + 16I$.

10. सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x+1 \\ 2x & x(x-1) & x(x+1) \\ 3x(1-x) & x(x-1)(x-2) & x(x+1)(x-1) \end{vmatrix} = 6x^2(1-x^2)$$

Using the properties of determinants, prove the following :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x+1 \\ 2x & x(x-1) & x(x+1) \\ 3x(1-x) & x(x-1)(x-2) & x(x+1)(x-1) \end{vmatrix} = 6x^2(1-x^2)$$

11. यदि $x = \alpha \sin 2t (1 + \cos 2t)$ तथा $y = \beta \cos 2t (1 - \cos 2t)$ है, तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{\alpha} \tan t$.

If $x = \alpha \sin 2t (1 + \cos 2t)$ and $y = \beta \cos 2t (1 - \cos 2t)$, show that $\frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{\alpha} \tan t$.

12. ज्ञात कीजिए :

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1}\left(\frac{x - x^{-1}}{x + x^{-1}}\right)$$

Find :

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1}\left(\frac{x - x^{-1}}{x + x^{-1}}\right)$$

13. $x = 1$ पर निम्नलिखित फलन $f(x)$ का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए :

$$\cos^{-1}\left[\sin\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right] + x^x$$

Find the derivative of the following function $f(x)$ w.r.t. x, at $x = 1$:

$$\cos^{-1}\left[\sin\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right] + x^x$$

14. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2^{\sin x}}{2^{\sin x} + 2^{\cos x}}\, dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{3/2} |x \,.\, \cos(\pi x)|\, dx$$

Evaluate :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2^{\sin x}}{2^{\sin x} + 2^{\cos x}}\, dx$$

OR

Evaluate :

$$\int_0^{3/2} |x \,.\, \cos(\pi x)|\, dx$$

15. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int (\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x})\, dx$$

Evaluate :

$$\int (\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x})\, dx$$

16. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^3 + x}\, dx$$

Find :

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^3 + x}\, dx$$

17. दर्शाइए कि चार बिन्दु A, B, C तथा D जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $-\hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $4(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ हैं, समतलीय हैं ।

Show that four points A, B, C and D whose position vectors are $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $-\hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}$ and $4(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ respectively are coplanar.

18. दिखाइए कि निम्नलिखित दो रेखाएँ समतलीय हैं :

$$\frac{x - a + d}{\alpha - \delta} = \frac{y - a}{\alpha} = \frac{z - a - d}{\alpha + \delta} \text{ और } \frac{x - b + c}{\beta - \gamma} = \frac{y - b}{\beta} = \frac{z - b - c}{\beta + \gamma}$$

अथवा

समतल $5x - 4y + 7z - 13 = 0$ और y-अक्ष के बीच न्यून कोण ज्ञात कीजिए ।

Show that the following two lines are coplanar :

$$\frac{x - a + d}{\alpha - \delta} = \frac{y - a}{\alpha} = \frac{z - a - d}{\alpha + \delta} \text{ and } \frac{x - b + c}{\beta - \gamma} = \frac{y - b}{\beta} = \frac{z - b - c}{\beta + \gamma}$$

OR

Find the acute angle between the plane $5x - 4y + 7z - 13 = 0$ and the y-axis.

19. A और B बारी-बारी से एक पासे को उछालते हैं जब तक कि उनमें से कोई एक पासे पर चार से बड़ी संख्या प्राप्त कर खेल को जीत नहीं लेता । यदि A खेल को शुरू करे, तो B के जीतने की प्रायिकता क्या है ?

अथवा

एक पासे को तीन बार उछालने के परीक्षण में घटना A तथा B को निम्न प्रकार से परिभाषित किया गया है :

A : पहली उछाल पर संख्या 5 और दूसरी उछाल पर संख्या 6 प्रकट होना ।

B : तीसरी उछाल पर संख्या 3 या 4 प्रकट होना ।

यदि A का घटित होना दिया गया है, तो घटना B की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

A and B throw a die alternatively till one of them gets a number greater than four and wins the game. If A starts the game, what is the probability of B winning ?

OR

A die is thrown three times. Events A and B are defined as below :

A : 5 on the first and 6 on the second throw.

B : 3 or 4 on the third throw.

Find the probability of B, given that A has already occurred.

खण्ड स

SECTION C

प्रश्न संख्या 20 से 26 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Question numbers 20 to 26 carry 6 marks each.

20. यदि फलन $f : R \rightarrow R$ परिभाषित है $f(x) = 2x - 3$ द्वारा तथा फलन $g : R \rightarrow R$ परिभाषित है $g(x) = x^3 + 5$ द्वारा, तो $(fog)^{-1}(x)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

अथवा

माना कि $A = Q \times Q$, जबकि Q सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय है तथा $*$ एक द्विआधारी संक्रिया है जो A पर सभी $(a, b), (c, d) \in A$ के लिए $(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad)$ द्वारा परिभाषित है, तो

(i) A में तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए ।

(ii) A में व्युत्क्रमणीय अवयव ज्ञात कीजिए ।

If the function $f : R \to R$ be defined by $f(x) = 2x - 3$ and $g : R \to R$ by $g(x) = x^3 + 5$, then find the value of $(fog)^{-1}(x)$.

OR

Let $A = Q \times Q$, where Q is the set of all rational numbers, and $*$ be a binary operation defined on A by

$(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad)$, for all $(a, b)\,(c, d) \in A$.

Find

(i) the identity element in A.

(ii) the invertible element of A.

21. यदि फलन $f(x) = 2x^3 - 9mx^2 + 12m^2x + 1$, जहाँ $m > 0$, p तथा q पर क्रमशः उच्चतम मान और निम्नतम मान प्राप्त करता है, जहाँ $p^2 = q$ है, तो m का मान ज्ञात कीजिए ।

If the function $f(x) = 2x^3 - 9mx^2 + 12m^2x + 1$, where $m > 0$ attains its maximum and minimum at p and q respectively such that $p^2 = q$, then find the value of m.

22. समाकलन विधि से, रेखाओं $y = 2 + x$, $y = 2 - x$ और $x = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Using integration, find the area of the region bounded by the lines $y = 2 + x$, $y = 2 - x$ and $x = 2$.

23. ऐसी सभी सीधी रेखाओं के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल-बिन्दु से मात्रक दूरी पर हैं ।

अथवा

दर्शाइए कि अवकल समीकरण $2xy\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y^2$ समघातीय है और इसका हल ज्ञात कीजिए ।

Find the differential equation for all the straight lines, which are at a unit distance from the origin.

OR

Show that the differential equation $2xy\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y^2$ is homogeneous and solve it.

24. उस समतल, जो बिन्दु (1, 0, 0) व (0, 1, 0) से गुज़रता है तथा समतल $x + y = 3$ से $\frac{\pi}{4}$ का कोण बनाता है, के लम्ब के दिक्-अनुपात ज्ञात कीजिए तथा समतल का समीकरण भी ज्ञात कीजिए ।

Find the direction ratios of the normal to the plane, which passes through the points (1, 0, 0) and (0, 1, 0) and makes angle $\frac{\pi}{4}$ with the plane $x + y = 3$. Also find the equation of the plane.

25. एक महाविद्यालय के 40% विद्यार्थी छात्रावास में रहते हैं और बाकी के बाहर रहते हैं । वर्ष के अन्त में छात्रावास में रहने वाले 50% छात्र A ग्रेड (श्रेणी) में उत्तीर्ण होते हैं तथा बाहर रहने वालों में से केवल 30% छात्र ही A ग्रेड (श्रेणी) प्राप्त करते हैं । वर्ष के अन्त में एक छात्र यादृच्छया चुना जाता है और पाया जाता है कि उसने A ग्रेड (श्रेणी) प्राप्त किया है । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह छात्र छात्रावासी है ।

40% students of a college reside in hostel and the remaining reside outside. At the end of the year, 50% of the hostelers got A grade while from outside students, only 30% got A grade in the examination. At the end of the year, a student of the college was chosen at random and was found to have gotten A grade. What is the probability that the selected student was a hosteler ?

26. दीपावली के उत्सव पर, स्थानीय डाकघर का डाकपाल कुछ अतिरिक्त व्यक्तियों की सेवाएँ लेना चाहता है, क्योंकि इस समय कहीं अधिक डाकपत्रों को संभालना तथा वितरण करना होता है । ऑफिस जगह की कमी एवं वित्तीय समस्याओं के कारण वह 10 से अधिक अतिरिक्त व्यक्तियों की सेवाएँ नहीं ले सकता है । पहले के अनुभव से यह ज्ञात है कि एक पुरुष दिनभर में 300 लैटरों व 80 पैकेटों को सम्भाल सकता है, तथा एक महिला दिनभर में 400 लैटरों व 50 पैकेटों को सम्भाल सकती है । डाकपाल का यह मानना है कि प्रतिदिन कम-से-कम 3400 लैटरों व 680 पैकेटों को सम्भालना होगा । डाकपाल को प्रतिदिन ₹ 225 एक पुरुष को और ₹ 200 एक महिला को देने होंगे । ज्ञात कीजिए डाकपाल कितने पुरुष व कितनी महिलाएँ काम पर रखे कि तनख्वाह के रूप में कम-से-कम राशि देनी पड़े । इस प्रश्न को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ़ द्वारा हल कीजिए ।

The postmaster of a local post office wishes to hire extra helpers during the Deepawali season, because of a large increase in the volume of mail handling and delivery. Because of the limited office space and the budgetary conditions, the number of temporary helpers must not exceed 10. According to past experience, a man can handle 300 letters and 80 packages per day, on the average, and a woman can handle 400 letters and 50 packets per day. The postmaster believes that the daily volume of extra mail and packages will be no less than 3400 and 680 respectively. A man receives ₹ 225 a day and a woman receives ₹ 200 a day. How many men and women helpers should be hired to keep the pay-roll at a minimum ? Formulate an LPP and solve it graphically.

SET-2

Series SSO

कोड नं.
Code No. **65/2/P**

रोल नं.
Roll No. | | | | | | | |

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **12** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **26** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **12** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **26** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे | *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours | *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न–पत्र में* ***26*** *प्रश्न हैं ।*

(iii) *खण्ड अ के प्रश्न* ***1 – 6*** *तक अति लघु-उत्तर वाले प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए* ***1*** *अंक निर्धारित है ।*

(iv) *खण्ड ब के प्रश्न* ***7 – 19*** *तक दीर्घ-उत्तर I प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए* ***4*** *अंक निर्धारित हैं ।*

(v) *खण्ड स के प्रश्न* ***20 – 26*** *तक दीर्घ-उत्तर II प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए* ***6*** *अंक निर्धारित हैं ।*

(vi) *उत्तर लिखना प्रारम्भ करने से पहले कृपया प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखिए ।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *Please check that this question paper contains* ***26*** *questions.*

(iii) *Questions* ***1 – 6*** *in Section A are very short-answer type questions carrying* ***1*** *mark each.*

(iv) *Questions* ***7 – 19*** *in Section B are long-answer I type questions carrying* ***4*** *marks each.*

(v) *Questions* ***20 – 26*** *in Section C are long-answer II type questions carrying* ***6*** *marks each.*

(vi) *Please write down the serial number of the question before attempting it.*

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 6 तक प्रत्येक प्रश्न का 1 अंक है ।

Question numbers 1 to 6 carry 1 mark each.

1. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$ का मान लिखिए ।

Write the value of $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$.

2. यदि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{c} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$ है, तो $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

If $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{c} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$, then find the value of $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

3. निम्न रेखा के दिक्-अनुपातों को लिखिए :

$$x = -3, \quad \frac{y-4}{3} = \frac{2-z}{1}$$

Write the direction ratios of the following line :

$$x = -3, \quad \frac{y-4}{3} = \frac{2-z}{1}$$

4. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} लिखिए ।

If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, then write A^{-1}.

5. वह अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = cx + c^2$ को निरूपित करता है ।

Find the differential equation representing the curve $y = cx + c^2$.

6. निम्न अवकल समीकरण का समाकलन गुणक लिखिए :

$$(1 + y^2)\, dx - (\tan^{-1} y - x)\, dy = 0$$

Write the integrating factor of the following differential equation :

$$(1 + y^2)\, dx - (\tan^{-1} y - x)\, dy = 0$$

खण्ड ब

SECTION B

प्रश्न संख्या 7 से 19 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।

Question numbers 7 to 19 carry 4 marks each.

7. सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x+1 \\ 2x & x(x-1) & x(x+1) \\ 3x(1-x) & x(x-1)(x-2) & x(x+1)(x-1) \end{vmatrix} = 6x^2(1-x^2)$$

Using the properties of determinants, prove the following :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x+1 \\ 2x & x(x-1) & x(x+1) \\ 3x(1-x) & x(x-1)(x-2) & x(x+1)(x-1) \end{vmatrix} = 6x^2(1-x^2)$$

8. यदि $x = \alpha \sin 2t\,(1 + \cos 2t)$ तथा $y = \beta \cos 2t\,(1 - \cos 2t)$ है, तो दर्शाइए कि $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\beta}{\alpha} \tan t$.

If $x = \alpha \sin 2t\,(1 + \cos 2t)$ and $y = \beta \cos 2t\,(1 - \cos 2t)$, show that $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\beta}{\alpha} \tan t$.

9. ज्ञात कीजिए :

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}\left(\frac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}}\right)$$

Find :

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}\left(\frac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}}\right)$$

10. $x = 1$ पर निम्नलिखित फलन $f(x)$ का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए :

$$\cos^{-1}\left[\sin\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right]+x^{x}$$

Find the derivative of the following function $f(x)$ w.r.t. x, at $x = 1$:

$$\cos^{-1}\left[\sin\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right]+x^{x}$$

11. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{0}^{\pi/2}\frac{2^{\sin x}}{2^{\sin x}+2^{\cos x}}\,dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{0}^{3/2}|x\,.\cos(\pi x)|\,dx$$

Evaluate :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2^{\sin x}}{2^{\sin x} + 2^{\cos x}} dx$$

OR

Evaluate :

$$\int_0^{3/2} |x \cdot \cos(\pi x)| dx$$

12. एक अनाथालय के लिए धन एकत्रित करने हेतु, तीन विद्यालयों A, B तथा C के विद्यार्थियों ने एक प्रदर्शनी अपने मोहल्ले में आयोजित की । उन्होंने इस प्रदर्शनी में पुन: चक्रित कागज़ से बने कागज़ के थैले, स्क्रैप-पुस्तकें एवं हल्का रंगीन पेस्टल कागज़ क्रमश: ₹ 20, ₹ 15 और ₹ 5 प्रति इकाई से बेचा है । विद्यालय A ने 25 कागज़ के थैले, 12 स्क्रैप-पुस्तकें एवं 34 हल्के रंगीन पेस्टल कागज़ बेचे, विद्यालय B ने 22 कागज़ के थैले, 15 स्क्रैप-पुस्तकें एवं 28 हल्के रंगीन पेस्टल कागज़ और विद्यालय C ने 26 कागज़ के थैले, 18 स्क्रैप-पुस्तकें एवं 36 हल्के रंगीन पेस्टल कागज़ बेचे । आव्यूहों का प्रयोग करके, यह ज्ञात कीजिए कि इन विद्यार्थियों ने प्रति विद्यालय कितना धन अर्जित किया ।

इस प्रकार की प्रदर्शनी के आयोजन से विद्यार्थियों में किन मूल्यों का जनन होता है ?

To raise money for an orphanage, students of three schools A, B and C organised an exhibition in their locality, where they sold paper bags, scrap-books and pastel sheets made by them using recycled paper, at the rate of ₹ 20, ₹ 15 and ₹ 5 per unit respectively. School A sold 25 paper bags, 12 scrap-books and 34 pastel sheets. School B sold 22 paper bags, 15 scrap-books and 28 pastel sheets while School C sold 26 paper bags, 18 scrap-books and 36 pastel sheets. Using matrices, find the total amount raised by each school.

By such exhibition, which values are generated in the students ?

13. सिद्ध कीजिए :

$$2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a\cos x + b}{a + b\cos x}\right)$$

अथवा

निम्नलिखित को x के लिए हल कीजिए :

$$\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{x-3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+2}{x+3}\right) = \frac{\pi}{4}, \ |x| < 1.$$

Prove that :

$$2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a\cos x + b}{a + b\cos x}\right)$$

OR

Solve the following for x :

$$\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{x-3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+2}{x+3}\right) = \frac{\pi}{4}, \ |x| < 1.$$

14. यदि $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ है, तो $A^2 - 5A + 16I$ ज्ञात कीजिए ।

If $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, find $A^2 - 5A + 16I$.

15. दर्शाइए कि चार बिन्दु A, B, C तथा D जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $-\hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $4(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ हैं, समतलीय हैं ।

Show that four points A, B, C and D whose position vectors are $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $-\hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}$ and $4(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ respectively are coplanar.

16. दिखाइए कि निम्नलिखित दो रेखाएँ समतलीय हैं :

$$\frac{x-a+d}{\alpha-\delta} = \frac{y-a}{\alpha} = \frac{z-a-d}{\alpha+\delta} \text{ और } \frac{x-b+c}{\beta-\gamma} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-b-c}{\beta+\gamma}$$

अथवा

समतल $5x - 4y + 7z - 13 = 0$ और y-अक्ष के बीच न्यून कोण ज्ञात कीजिए ।

Show that the following two lines are coplanar :

$$\frac{x-a+d}{\alpha-\delta} = \frac{y-a}{\alpha} = \frac{z-a-d}{\alpha+\delta} \text{ and } \frac{x-b+c}{\beta-\gamma} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-b-c}{\beta+\gamma}$$

OR

Find the acute angle between the plane $5x - 4y + 7z - 13 = 0$ and the y-axis.

17. A और B बारी-बारी से एक पासे को उछालते हैं जब तक कि उनमें से कोई एक पासे पर चार से बड़ी संख्या प्राप्त कर खेल को जीत नहीं लेता । यदि A खेल को शुरू करे, तो B के जीतने की प्रायिकता क्या है ?

अथवा

एक पासे को तीन बार उछालने के परीक्षण में घटना A तथा B को निम्न प्रकार से परिभाषित किया गया है :

A : पहली उछाल पर संख्या 5 और दूसरी उछाल पर संख्या 6 प्रकट होना ।

B : तीसरी उछाल पर संख्या 3 या 4 प्रकट होना ।

यदि A का घटित होना दिया गया है, तो घटना B की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

A and B throw a die alternatively till one of them gets a number greater than four and wins the game. If A starts the game, what is the probability of B winning ?

OR

A die is thrown three times. Events A and B are defined as below :

A : 5 on the first and 6 on the second throw.

B : 3 or 4 on the third throw.

Find the probability of B, given that A has already occurred.

18. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int (\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x})\, dx$$

Evaluate :

$$\int (\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x})\, dx$$

19. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^3 + x}\, dx$$

Find :

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^3 + x}\, dx$$

खण्ड स

SECTION C

प्रश्न संख्या 20 से 26 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Question numbers 20 to 26 carry 6 marks each.

20. समाकलन विधि से, रेखाओं $y = 2 + x$, $y = 2 - x$ और $x = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Using integration, find the area of the region bounded by the lines $y = 2 + x$, $y = 2 - x$ and $x = 2$.

21. ऐसी सभी सीधी रेखाओं के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल-बिन्दु से मात्रक दूरी पर हैं ।

अथवा

दर्शाइए कि अवकल समीकरण $2xy\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y^2$ समघातीय है और इसका हल ज्ञात कीजिए ।

Find the differential equation for all the straight lines, which are at a unit distance from the origin.

OR

Show that the differential equation $2xy\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y^2$ is homogeneous and solve it.

22. उस समतल, जो बिन्दु (1, 0, 0) व (0, 1, 0) से गुज़रता है तथा समतल $x + y = 3$ से $\frac{\pi}{4}$ का कोण बनाता है, के लम्ब के दिक्-अनुपात ज्ञात कीजिए तथा समतल का समीकरण भी ज्ञात कीजिए ।

Find the direction ratios of the normal to the plane, which passes through the points (1, 0, 0) and (0, 1, 0) and makes angle $\frac{\pi}{4}$ with the plane $x + y = 3$. Also find the equation of the plane.

23. यदि फलन $f : R \rightarrow R$ परिभाषित है $f(x) = 2x - 3$ द्वारा तथा फलन $g : R \rightarrow R$ परिभाषित है $g(x) = x^3 + 5$ द्वारा, तो $(fog)^{-1}(x)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

अथवा

माना कि $A = Q \times Q$, जबकि Q सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय है तथा $*$ एक द्विआधारी संक्रिया है जो A पर सभी $(a, b), (c, d) \in A$ के लिए $(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad)$ द्वारा परिभाषित है, तो

(i) A में तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए ।

(ii) A में व्युत्क्रमणीय अवयव ज्ञात कीजिए ।

If the function $f : R \to R$ be defined by $f(x) = 2x - 3$ and $g : R \to R$ by $g(x) = x^3 + 5$, then find the value of $(fog)^{-1}(x)$.

OR

Let $A = Q \times Q$, where Q is the set of all rational numbers, and $*$ be a binary operation defined on A by

$(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad)$, for all $(a, b)\ (c, d) \in A$.

Find

(i) the identity element in A.

(ii) the invertible element of A.

24. यदि फलन $f(x) = 2x^3 - 9mx^2 + 12m^2x + 1$, जहाँ $m > 0$, p तथा q पर क्रमशः उच्चतम मान और निम्नतम मान प्राप्त करता है, जहाँ $p^2 = q$ है, तो m का मान ज्ञात कीजिए ।

If the function $f(x) = 2x^3 - 9mx^2 + 12m^2x + 1$, where $m > 0$ attains its maximum and minimum at p and q respectively such that $p^2 = q$, then find the value of m.

25. दीपावली के उत्सव पर, स्थानीय डाकघर का डाकपाल कुछ अतिरिक्त व्यक्तियों की सेवाएँ लेना चाहता है, क्योंकि इस समय कहीं अधिक डाकपत्रों को संभालना तथा वितरण करना होता है । ऑफिस जगह की कमी एवं वित्तीय समस्याओं के कारण वह 10 से अधिक अतिरिक्त व्यक्तियों की सेवाएँ नहीं ले सकता है । पहले के अनुभव से यह ज्ञात है कि एक पुरुष दिनभर में 300 लैटरों व 80 पैकेटों को सम्भाल सकता है, तथा एक महिला दिनभर में 400 लैटरों व 50 पैकेटों को सम्भाल सकती है । डाकपाल का यह मानना है कि प्रतिदिन कम-से-कम 3400 लैटरों व 680 पैकेटों को सम्भालना होगा । डाकपाल को प्रतिदिन ₹ 225 एक पुरुष को और ₹ 200 एक महिला को देने होंगे । ज्ञात कीजिए डाकपाल कितने पुरुष व कितनी महिलाएँ काम पर रखे कि तनख्वाह के रूप में कम-से-कम राशि देनी पड़े । इस प्रश्न को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ़ द्वारा हल कीजिए ।

The postmaster of a local post office wishes to hire extra helpers during the Deepawali season, because of a large increase in the volume of mail handling and delivery. Because of the limited office space and the budgetary conditions, the number of temporary helpers must not exceed 10. According to past experience, a man can handle 300 letters and 80 packages per day, on the average, and a woman can handle 400 letters and 50 packets per day. The postmaster believes that the daily volume of extra mail and packages will be no less than 3400 and 680 respectively. A man receives ₹ 225 a day and a woman receives ₹ 200 a day. How many men and women helpers should be hired to keep the pay-roll at a minimum ? Formulate an LPP and solve it graphically.

26. एक महाविद्यालय के 40% विद्यार्थी छात्रावास में रहते हैं और बाकी के बाहर रहते हैं । वर्ष के अन्त में छात्रावास में रहने वाले 50% छात्र A ग्रेड (श्रेणी) में उत्तीर्ण होते हैं तथा बाहर रहने वालों में से केवल 30% छात्र ही A ग्रेड (श्रेणी) प्राप्त करते हैं । वर्ष के अन्त में एक छात्र यादृच्छया चुना जाता है और पाया जाता है कि उसने A ग्रेड (श्रेणी) प्राप्त किया है । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह छात्र छात्रावासी है ।

40% students of a college reside in hostel and the remaining reside outside. At the end of the year, 50% of the hostelers got A grade while from outside students, only 30% got A grade in the examination. At the end of the year, a student of the college was chosen at random and was found to have gotten A grade. What is the probability that the selected student was a hosteler ?

SET-3

Series SSO

कोड नं.
Code No. **65/3/P**

रोल नं.
Roll No. | | | | | | | |

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **12** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **26** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **12** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **26** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे | *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours | *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) **सभी** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न–पत्र में* **26** *प्रश्न हैं ।*

(iii) *खण्ड अ के प्रश्न* **1 – 6** *तक अति लघु-उत्तर वाले प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए* **1** *अंक निर्धारित है ।*

(iv) *खण्ड ब के प्रश्न* **7 – 19** *तक दीर्घ-उत्तर I प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए* **4** *अंक निर्धारित हैं ।*

(v) *खण्ड स के प्रश्न* **20 – 26** *तक दीर्घ-उत्तर II प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए* **6** *अंक निर्धारित हैं ।*

(vi) *उत्तर लिखना प्रारम्भ करने से पहले कृपया प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखिए ।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *Please check that this question paper contains* ***26*** *questions.*

(iii) *Questions* ***1 – 6*** *in Section A are very short-answer type questions carrying* ***1*** *mark each.*

(iv) *Questions* ***7 – 19*** *in Section B are long-answer I type questions carrying* ***4*** *marks each.*

(v) *Questions* ***20 – 26*** *in Section C are long-answer II type questions carrying* ***6*** *marks each.*

(vi) *Please write down the serial number of the question before attempting it.*

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 6 तक प्रत्येक प्रश्न का 1 अंक है ।

Question numbers 1 to 6 carry 1 mark each.

1. वह अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = cx + c^2$ को निरूपित करता है ।

Find the differential equation representing the curve $y = cx + c^2$.

2. निम्न अवकल समीकरण का समाकलन गुणक लिखिए :

$$(1 + y^2)\, dx - (\tan^{-1} y - x)\, dy = 0$$

Write the integrating factor of the following differential equation :

$$(1 + y^2)\, dx - (\tan^{-1} y - x)\, dy = 0$$

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} लिखिए ।

If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, then write A^{-1}.

4. यदि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{c} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$ है, तो $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

If $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{c} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$, then find the value of $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

5. निम्न रेखा के दिक्-अनुपातों को लिखिए :

$$x = -3, \quad \frac{y-4}{3} = \frac{2-z}{1}$$

Write the direction ratios of the following line :

$$x = -3, \quad \frac{y-4}{3} = \frac{2-z}{1}$$

6. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$ का मान लिखिए ।

Write the value of $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$.

खण्ड ब

SECTION B

प्रश्न संख्या 7 से 19 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।
Question numbers 7 to 19 carry 4 marks each.

7. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int (\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x})\, dx$$

Evaluate :

$$\int (\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x})\, dx$$

8. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^3 + x}\, dx$$

Find :

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^3 + x}\, dx$$

9. दर्शाइए कि चार बिन्दु A, B, C तथा D जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $-\hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $4(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ हैं, समतलीय हैं ।

Show that four points A, B, C and D whose position vectors are $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $-\hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}$ and $4(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ respectively are coplanar.

10. दिखाइए कि निम्नलिखित दो रेखाएँ समतलीय हैं :

$$\frac{x-a+d}{\alpha-\delta} = \frac{y-a}{\alpha} = \frac{z-a-d}{\alpha+\delta} \text{ और } \frac{x-b+c}{\beta-\gamma} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-b-c}{\beta+\gamma}$$

अथवा

समतल $5x - 4y + 7z - 13 = 0$ और y-अक्ष के बीच न्यून कोण ज्ञात कीजिए ।

Show that the following two lines are coplanar :

$$\frac{x-a+d}{\alpha-\delta} = \frac{y-a}{\alpha} = \frac{z-a-d}{\alpha+\delta} \text{ and } \frac{x-b+c}{\beta-\gamma} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-b-c}{\beta+\gamma}$$

OR

Find the acute angle between the plane $5x - 4y + 7z - 13 = 0$ and the y-axis.

11. A और B बारी-बारी से एक पासे को उछालते हैं जब तक कि उनमें से कोई एक पासे पर चार से बड़ी संख्या प्राप्त कर खेल को जीत नहीं लेता । यदि A खेल को शुरू करे, तो B के जीतने की प्रायिकता क्या है ?

अथवा

एक पासे को तीन बार उछालने के परीक्षण में घटना A तथा B को निम्न प्रकार से परिभाषित किया गया है :

A : पहली उछाल पर संख्या 5 और दूसरी उछाल पर संख्या 6 प्रकट होना ।

B : तीसरी उछाल पर संख्या 3 या 4 प्रकट होना ।

यदि A का घटित होना दिया गया है, तो घटना B की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

A and B throw a die alternatively till one of them gets a number greater than four and wins the game. If A starts the game, what is the probability of B winning ?

OR

A die is thrown three times. Events A and B are defined as below :

A : 5 on the first and 6 on the second throw.

B : 3 or 4 on the third throw.

Find the probability of B, given that A has already occurred.

12. सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x+1 \\ 2x & x(x-1) & x(x+1) \\ 3x(1-x) & x(x-1)(x-2) & x(x+1)(x-1) \end{vmatrix} = 6x^2(1-x^2)$$

Using the properties of determinants, prove the following :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x+1 \\ 2x & x(x-1) & x(x+1) \\ 3x(1-x) & x(x-1)(x-2) & x(x+1)(x-1) \end{vmatrix} = 6x^2(1-x^2)$$

13. यदि $x = \alpha \sin 2t\ (1 + \cos 2t)$ तथा $y = \beta \cos 2t\ (1 - \cos 2t)$ है, तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{\alpha} \tan t$.

If $x = \alpha \sin 2t\ (1 + \cos 2t)$ and $y = \beta \cos 2t\ (1 - \cos 2t)$, show that $\frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{\alpha} \tan t$.

14. ज्ञात कीजिए :

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1}\left(\frac{x - x^{-1}}{x + x^{-1}}\right)$$

Find :

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1}\left(\frac{x - x^{-1}}{x + x^{-1}}\right)$$

15. $x = 1$ पर निम्नलिखित फलन $f(x)$ का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए :

$$\cos^{-1}\left[\sin \sqrt{\frac{1+x}{2}}\right] + x^x$$

Find the derivative of the following function $f(x)$ w.r.t. x, at $x = 1$:

$$\cos^{-1}\left[\sin \sqrt{\frac{1+x}{2}}\right] + x^x$$

16. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{0}^{\pi/2} \frac{2^{\sin x}}{2^{\sin x} + 2^{\cos x}} dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{0}^{3/2} |x \cdot \cos(\pi x)| dx$$

Evaluate :

$$\int_{0}^{\pi/2} \frac{2^{\sin x}}{2^{\sin x} + 2^{\cos x}} dx$$

OR

Evaluate :

$$\int_{0}^{3/2} |x \cdot \cos(\pi x)| dx$$

17. एक अनाथालय के लिए धन एकत्रित करने हेतु, तीन विद्यालयों A, B तथा C के विद्यार्थियों ने एक प्रदर्शनी अपने मोहल्ले में आयोजित की । उन्होंने इस प्रदर्शनी में पुन: चक्रित कागज़ से बने कागज़ के थैले, स्क्रैप-पुस्तकें एवं हल्का रंगीन पेस्टल कागज़ क्रमश: ₹ 20, ₹ 15 और ₹ 5 प्रति इकाई से बेचा है । विद्यालय A ने 25 कागज़ के थैले, 12 स्क्रैप-पुस्तकें एवं 34 हल्के रंगीन पेस्टल कागज़ बेचे, विद्यालय B ने 22 कागज़ के थैले, 15 स्क्रैप-पुस्तकें एवं 28 हल्के रंगीन पेस्टल कागज़ और विद्यालय C ने 26 कागज़ के थैले, 18 स्क्रैप-पुस्तकें एवं 36 हल्के रंगीन पेस्टल कागज़ बेचे । आव्यूहों का प्रयोग करके, यह ज्ञात कीजिए कि इन विद्यार्थियों ने प्रति विद्यालय कितना धन अर्जित किया ।

इस प्रकार की प्रदर्शनी के आयोजन से विद्यार्थियों में किन मूल्यों का जनन होता है ?

To raise money for an orphanage, students of three schools A, B and C organised an exhibition in their locality, where they sold paper bags, scrap-books and pastel sheets made by them using recycled paper, at the rate of ₹ 20, ₹ 15 and ₹ 5 per unit respectively. School A sold 25 paper bags, 12 scrap-books and 34 pastel sheets. School B sold 22 paper bags, 15 scrap-books and 28 pastel sheets while School C sold 26 paper bags, 18 scrap-books and 36 pastel sheets. Using matrices, find the total amount raised by each school.

By such exhibition, which values are generated in the students ?

18. सिद्ध कीजिए :

$$2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a\cos x + b}{a + b\cos x}\right)$$

अथवा

निम्नलिखित को x के लिए हल कीजिए :

$$\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{x-3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+2}{x+3}\right) = \frac{\pi}{4}, \ |x|<1.$$

Prove that :

$$2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a\cos x + b}{a + b\cos x}\right)$$

OR

Solve the following for x :

$$\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{x-3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+2}{x+3}\right) = \frac{\pi}{4}, \ |x|<1.$$

19. यदि $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ है, तो $A^2 - 5A + 16I$ ज्ञात कीजिए ।

If $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, find $A^2 - 5A + 16I$.

खण्ड स

SECTION C

प्रश्न संख्या 20 से 26 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Question numbers 20 to 26 carry 6 marks each.

20. एक महाविद्यालय के 40% विद्यार्थी छात्रावास में रहते हैं और बाकी के बाहर रहते हैं । वर्ष के अन्त में छात्रावास में रहने वाले 50% छात्र A ग्रेड (श्रेणी) में उत्तीर्ण होते हैं तथा बाहर रहने वालों में से केवल 30% छात्र ही A ग्रेड (श्रेणी) प्राप्त करते हैं । वर्ष के अन्त में एक छात्र यादृच्छया चुना जाता है और पाया जाता है कि उसने A ग्रेड (श्रेणी) प्राप्त किया है । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह छात्र छात्रावासी है ।

40% students of a college reside in hostel and the remaining reside outside. At the end of the year, 50% of the hostelers got A grade while from outside students, only 30% got A grade in the examination. At the end of the year, a student of the college was chosen at random and was found to have gotten A grade. What is the probability that the selected student was a hosteler ?

21. दीपावली के उत्सव पर, स्थानीय डाकघर का डाकपाल कुछ अतिरिक्त व्यक्तियों की सेवाएँ लेना चाहता है, क्योंकि इस समय कहीं अधिक डाकपत्रों को संभालना तथा वितरण करना होता है । ऑफिस जगह की कमी एवं वित्तीय समस्याओं के कारण वह 10 से अधिक अतिरिक्त व्यक्तियों की सेवाएँ नहीं ले सकता है । पहले के अनुभव से यह ज्ञात है कि एक पुरुष दिनभर में 300 लैटरों व 80 पैकेटों को सम्भाल सकता है, तथा एक महिला दिनभर में 400 लैटरों व 50 पैकेटों को सम्भाल सकती है । डाकपाल का यह मानना है कि प्रतिदिन कम-से-कम 3400 लैटरों व 680 पैकेटों को सम्भालना होगा । डाकपाल को प्रतिदिन ₹ 225 एक पुरुष को और ₹ 200 एक महिला को देने होंगे । ज्ञात कीजिए डाकपाल कितने पुरुष व कितनी महिलाएँ काम पर रखे कि तनख्वाह के रूप में कम-से-कम राशि देनी पड़े । इस प्रश्न को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ़ द्वारा हल कीजिए ।

The postmaster of a local post office wishes to hire extra helpers during the Deepawali season, because of a large increase in the volume of mail handling and delivery. Because of the limited office space and the budgetary conditions, the number of temporary helpers must not exceed 10. According to past experience, a man can handle 300 letters and 80 packages per day, on the average, and a woman can handle 400 letters and 50 packets per day. The postmaster believes that the daily volume of extra mail and packages will be no less than 3400 and 680 respectively. A man receives ₹ 225 a day and a woman receives ₹ 200 a day. How many men and women helpers should be hired to keep the pay-roll at a minimum ? Formulate an LPP and solve it graphically.

22. यदि फलन $f : R \rightarrow R$ परिभाषित है $f(x) = 2x - 3$ द्वारा तथा फलन $g : R \rightarrow R$ परिभाषित है $g(x) = x^3 + 5$ द्वारा, तो $(fog)^{-1}(x)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

अथवा

माना कि $A = Q \times Q$, जबकि Q सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय है तथा $*$ एक द्विआधारी संक्रिया है जो A पर सभी $(a, b), (c, d) \in A$ के लिए $(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad)$ द्वारा परिभाषित है, तो

(i) A में तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए ।

(ii) A में व्युत्क्रमणीय अवयव ज्ञात कीजिए ।

If the function $f : R \to R$ be defined by $f(x) = 2x - 3$ and $g : R \to R$ by $g(x) = x^3 + 5$, then find the value of $(fog)^{-1}(x)$.

OR

Let $A = Q \times Q$, where Q is the set of all rational numbers, and $*$ be a binary operation defined on A by

$(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad)$, for all $(a, b) (c, d) \in A$.

Find

(i) the identity element in A.

(ii) the invertible element of A.

23. यदि फलन $f(x) = 2x^3 - 9mx^2 + 12m^2x + 1$, जहाँ $m > 0$, p तथा q पर क्रमशः उच्चतम मान और निम्नतम मान प्राप्त करता है, जहाँ $p^2 = q$ है, तो m का मान ज्ञात कीजिए ।

If the function $f(x) = 2x^3 - 9mx^2 + 12m^2x + 1$, where $m > 0$ attains its maximum and minimum at p and q respectively such that $p^2 = q$, then find the value of m.

24. ऐसी सभी सीधी रेखाओं के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल-बिन्दु से मात्रक दूरी पर हैं ।

अथवा

दर्शाइए कि अवकल समीकरण $2xy\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y^2$ समघातीय है और इसका हल ज्ञात कीजिए ।

Find the differential equation for all the straight lines, which are at a unit distance from the origin.

OR

Show that the differential equation $2xy\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y^2$ is homogeneous and solve it.

25. उस समतल, जो बिन्दु (1, 0, 0) व (0, 1, 0) से गुज़रता है तथा समतल $x + y = 3$ से $\frac{\pi}{4}$ का कोण बनाता है, के लम्ब के दिक्-अनुपात ज्ञात कीजिए तथा समतल का समीकरण भी ज्ञात कीजिए ।

Find the direction ratios of the normal to the plane, which passes through the points (1, 0, 0) and (0, 1, 0) and makes angle $\frac{\pi}{4}$ with the plane $x + y = 3$. Also find the equation of the plane.

26. समाकलन विधि से, रेखाओं $y = 2 + x$, $y = 2 - x$ और $x = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Using integration, find the area of the region bounded by the lines $y = 2 + x$, $y = 2 - x$ and $x = 2$.

Strictly Confidential — (For Internal and Restricted Use Only)

Senior School Certificate Examination

March — 2015

Marking Scheme — Mathematics 65/1/P, 65/2/P, 65/3/P

General Instructions :

1. The Marking Scheme provides general guidelines to reduce subjectivity in the marking. The answers given in the Marking Scheme are suggestive answers. The content is thus indicative. If a student has given any other answer which is different from the one given in the Marking Scheme, but conveys the meaning, such answers should be given full weightage.

2. Evaluation is to be done as per instructions provided in the marking scheme. It should not be done according to one's own interpretation or any other consideration — Marking Scheme should be strictly adhered to and religiously followed.

3. Alternative methods are accepted. Proportional marks are to be awarded.

4. In question(s) on differential equations, constant of integration has to be written.

5. If a candidate has attempted an extra question, marks obtained in the question attempted first should be retained and the other answer should be scored out.

6. A full scale of marks - 0 to 100 has to be used. Please do not hesitate to award full marks if the answer deserves it.

7. Separate Marking Scheme for all the three sets has been given.

QUESTION PAPER CODE 65/1/P

EXPECTED ANSWERS/VALUE POINTS

SECTION - A

Marks

1. $|A| = -19$ ½ m

$A^{-1} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ ½ m

2. $\frac{dy}{dx} = c$ ½ m

$y = x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ ½ m

3. $\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}$ ½ m

I.F. $= e^{\tan^{-1}y}$ ½ m

4. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right) = \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a}\right] = 0$ 1 m

5. $\vec{a}+\vec{b} = 3\hat{i}+3\hat{j}$ ½ m

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = 3$ ½ m

6. $\frac{x+3}{0} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-2}{-1}$ ½ m

D.Rs are 0, 3, –1 ½ m

SECTION - B

7. $\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 25 & 12 & 34 \\ 22 & 15 & 28 \\ 26 & 18 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$ 1½ m

$$= \begin{pmatrix} 850 \\ 805 \\ 970 \end{pmatrix}$$ 1½ m

Any relevant value 1 m

8. $$\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{1-\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}\right\}$$ 1½ m

$$= \cos^{-1}\left\{\frac{a+b-a\tan^2\frac{x}{2}+b\tan^2\frac{x}{2}}{a+b+a\tan^2\frac{x}{2}-b\tan^2\frac{x}{2}}\right\}$$ 1 m

$$= \cos^{-1}\left\{\frac{a\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)+b\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}{a\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+b\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}\right\}$$ ½ m

$$= \cos^{-1}\left\{\frac{a\,\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}+b}{a+b\,\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}\right\}$$ ½ m

$$= \cos^{-1}\left\{\frac{a\cos x+b}{a+b\cos x}\right\}$$ ½ m

OR

$$\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{x-3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+2}{x+3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\frac{x-2}{x-3}+\frac{x+2}{x+3}}{1-\frac{x-2}{x-3}\cdot\frac{x+2}{x+3}}\right) = \frac{\pi}{4}$$ 1½ m

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2x^2-12}{-5}\right) = \frac{\pi}{4}$$ 1½ m

$$\Rightarrow \frac{2x^2-12}{-5} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{7}{2}$$ ½ m

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

For writing no solution as $|x| < 1$ ½ m

9. $$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$ 2 m

$$A^2 - 5A + 16I = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 15 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$ 1 m

$$= \begin{pmatrix} 11 & -1 & -3 \\ -1 & 9 & -10 \\ -5 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$ 1 m

10. Taking x from R_2, x (x – 1) from R_3 and (x + 1) from C_3

$$\Delta = x^2 (x-1)(x+1)\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & x-1 & 1 \\ -3 & x-2 & 1 \end{vmatrix}$$ 2 m

$C_2 \to C_2 - x\,C_1\,;\quad C_3 \to C_3 - C,$

$$= \; x^2\,(x^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1-x & -1 \\ -3 & 4x-2 & 4 \end{vmatrix}$$ 1 m

$$= \; x^2\,(x^2-1)\begin{vmatrix} -1\,(1+x) & -1 \\ 4x-2 & 4 \end{vmatrix}$$ ½ m

$$= \; 6x^2\,(1-x^2)$$ ½ m

11. $$\frac{dx}{dt} = \alpha\left[-2\sin 2t \sin 2t + 2\cos 2t\,(1+\cos 2t)\right]$$ 1 m

$$\frac{dy}{dt} = \beta\left[2\sin 2t\cos 2t - (1-\cos 2t)\cdot 2\sin 2t)\right]$$ 1 m

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt}\right) \Big/ \left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\beta\left(2\sin 4t - 2\sin 2t\right)}{\alpha\left(2\cos 4t + 2\cos 2t\right)}$$ ½+1 m

$$= \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{2\cos 3t\sin t}{2\cos 3t\cos t} = \frac{\beta}{\alpha}\tan t$$ ½ m

12. Let y $$= \cos^{-1}\left(\frac{x-x^{-1}}{x-x^{-1}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$ 1 m

$$= \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$ 1 m

$$= \pi - 2\tan^{-1}x$$ 1 m

$$\therefore \; \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{1+x^2}$$ 1 m

13. Let $y = \cos^{-1}\left\{\sin\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right\} + x^x$

Let $u = \cos^{-1}\left\{\sin\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right\}; \quad v = x^x$

$\therefore \quad y = u + v$

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ ½ m

$u = \cos^{-1}\left\{\sin\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right\} = \cos^{-1}\left[\cos\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)\right]$ ½ m

$= \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

$\therefore \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+x}}$ .... (i) ½ m

$v = x^x$

$\therefore \quad \log v = x \log x$

$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = x\cdot\frac{1}{x} + 1\log x = 1 + \log x$

$\frac{dv}{dx} = x^x(1+\log x)$ ....(ii) 1½ m

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+x}} + x^x(1+\log x)$ ½ m

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{at } x=1} = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$ ½ m

14. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{2^{\sin x}}{2^{\sin x} + 2^{\cos x}}\, dx$ .... (i)

$= \int_0^{\pi/2} \frac{2^{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{2^{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} + 2^{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}\, dx \left[\text{using} \int_0^a (x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx\right]$ 1½ m

$= \int_0^{\pi/2} \frac{2^{\cos x}}{2^{\sin x} + 2^{\cos x}}\, dx$ ....(ii) 1 m

Adding (i) and (ii),

$2I = \int_0^{\pi/2} 1\, dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$ 1 m

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$ ½ m

OR

$I = \int_0^{3/2} \left| x \cos(\pi x) \right| dx$

$= \int_0^{1/2} x \cos \pi x\, dx - \int_{1/2}^{3/2} x \cos \pi x\, dx$ 1 m

$= \left[\frac{x \sin \pi x}{\pi}\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{\sin \pi x}{\pi}\, dx - \left[\frac{x \sin \pi x}{\pi}\right]_{1/2}^{3/2} + \int_{1/2}^{3/2} \frac{-\sin \pi x}{\pi}\, dx$ 1½ m

$= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi^2}\left[\cos \pi x\right]_0^{1/2} + \frac{3}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi^2}\left[\cos \pi x\right]_{1/2}^{3/2}$

$= \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{3}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} + 0$ 1 m

$= \frac{5}{2\pi} - \frac{1}{\pi^2}$ ½ m

15. $I = \int\left(\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right) dx$

$$= \int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x \cos x}} dx$$ 1 m

$$= \sqrt{2} \int \frac{(\cos x + \sin x)}{\sqrt{1 - (1 - 2 \sin x \cot x)}} dx$$ 1 m

$$= \sqrt{2} \int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2}} dx$$ ½ m

Put $\sin x - \cos x = t \Rightarrow (\cos x + \sin x) dx = dt$ ½ m

$$\therefore \; I = \sqrt{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \sqrt{2} \sin^{-1} t + c$$ ½ m

$$= \sqrt{2} \sin^{-1}(\sin x - \cos x) + c$$ ½ m

16. $I = \int \frac{x^3 - 1}{x(x^2+1)} dx = \int \left(1 - \frac{x+1}{x(x^2+1)}\right) dx$ 1 m

$$= x - \int \frac{x+1}{x(x^2+1)} dx$$ ½ m

$$= x - I_1$$

Let $\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1} = \frac{1}{x} + \frac{1-x}{x^2+1}$ 1 m

$$\therefore \; I_1 = \int \frac{1}{x} + \frac{(1-x)}{x^2+1} dx = \log x - \frac{1}{2} \log\left|x^2+1\right| + \tan^{-1} x$$ 1 m

$$\therefore \; I = x - \log|x| + \frac{1}{2} \log\left|x^2+1\right| - \tan^{-1} x + c$$ ½ m

17. Here $\left.\begin{aligned} \vec{AB} &= -4\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k} \\ \vec{AC} &= -\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k} \\ \vec{AD} &= -8\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k} \end{aligned}\right\}$ 1½ m

For them to be coplanar, $\left[\vec{AB}\ \vec{AC}\ \vec{AD}\right] = 0$ 1½ m

i.e. $\begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -60 + 126 - 66 = 0$ ½ m

$\therefore$ Points A, B, C and D are coplanar ½ m

18. Here $\begin{vmatrix} b-c-(a-d) & b-a & b+c-(a+d) \\ \alpha-\delta & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta-\gamma & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix}$ 2½ m

$= 2\begin{vmatrix} b-a & b-a & b+c-a-d \\ \alpha & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix}$ $C_1 \to C_1 + C_3$ ½ m

$= 0$ $(\because C_1$ and C_2 are identical$)$ ½ m

Hence given lines are coplanar ½ m

OR

D.R's of normal to the plane are $5, -4, 7$ 1 m

D.R's of y – axis : $0, 1, 0$ ½ m

If θ is the angle between the plane and y–axis, then

$$\sin\theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$ 1 m

$$= \frac{-4}{3\sqrt{10}}$$ 1 m

$\therefore\ \theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{-4}{3\sqrt{10}}\right)$

$\therefore$ Acute angle is $\sin^{-1}\left(\dfrac{4}{3\sqrt{10}}\right)$ ½ m

19. Let E be the event of getting number greater than 4

$\therefore\ P(E) = \dfrac{1}{3}$ and $P(\overline{E}) = \dfrac{2}{3}$ ½+½ m

Required Probability = P $(\overline{E}\ E \text{ or } \overline{E}\ \overline{E}\ \overline{E}\ E \text{ or } \overline{E}\ \overline{E}\ \overline{E}\ \overline{E}\ \overline{E}\ E \text{ or } \ldots)$ 1 m

$= \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^3\cdot\dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^5\cdot\dfrac{1}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$ 1 m

$= \dfrac{2}{9}\left[1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty\right]$ ½ m

$= \dfrac{2}{9} \times \dfrac{9}{5} = \dfrac{2}{5}$ ½ m

OR

A = {(5, 6, 1), (5, 6, 2), (5, 6, 3), (5, 6, 4), (5, 6, 5), (5, 6, 6),}

$P(A) = \dfrac{6}{6\times6\times6} = \dfrac{1}{36}$, P (B) = P (getting 3 or 4 on the third throw) 1½ m

$A \cap B = \{(5, 6, 3), (5, 6, 4)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \dfrac{2}{6\times6\times6} = \dfrac{1}{108}$ 1½ m

$P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{1}{3}$ 1 m

SECTION - C

20. Let $y = (fog)(x)$ [say $y = h(x)$]

$= f[g(x)] = f(x^3 + 5)$ 2½ m

$= 2\,(x^3 + 5) - 3$

$= 2\,x^3 + 7$ 2½ m

$\therefore \quad x = \sqrt[3]{\dfrac{y-7}{2}} = h^{-1}(y)$ ½ m

$\therefore \quad (fog)^{-1} = \sqrt[3]{\dfrac{x-7}{2}}$ ½ m

OR

Let (x, y) be the identity element in $Q \times Q$, then

$(a, b) * (x, y) = (a, b) = (x, y) * (a, b) \;\; \forall \;\; (a, b) \in Q \times Q$ 1½ m

$\Rightarrow \quad (ax, b + ay) = (a, b)$

$\Rightarrow \quad a = ax \quad \text{and} \quad b = b + ay$

$\Rightarrow \quad x = 1 \quad \text{and} \quad y = 0$ 1 m

$\therefore \quad (1, 0)$ is the identity element in $Q \times Q$ ½ m

Let (a, b) be the invertible element in $Q \times Q$, then

there exists $(\alpha, \beta) \in Q \times Q$ such that

$(a, b) * (\alpha, \beta) = (\alpha, \beta) * (a, b) = (1, 0)$ 1½ m

$\Rightarrow \quad (a\alpha\,, b + a\beta) = (1, 0)$ 1 m

$\Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{1}{a}, \;\; \beta = -\dfrac{b}{a}$

$\therefore$ the invertible element in A is $\left(\dfrac{1}{a}, \; -\dfrac{b}{a}\right)$ ½ m

21. $f(x) = 2x^3 - 9\,m\,x^2 + 12\,m^2\,x + 1,\; m > 0$

$f'(x) = 6x^2 - 18\,m\,x + 12\,m^2$ 1 m

$f''(x) = 12x - 18\,m$ 1 m

For Max. or minimum, $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 18\,m\,x + 12\,m^2 = 0$

$$\Rightarrow (x - 2\,m)\,(x - m) = 0$$

$$\Rightarrow \; x = m \text{ or } 2\,m$$ 1 m

At $x = m$, $f''(x) = 12m - 18m = -\text{ve} \Rightarrow x = m$ is a maxima 1 m

At $x = 2\,m$, $f''(x) = 24m - 18m = +\text{ve} \Rightarrow x = 2m$ is manimum 1 m

$\therefore \quad p = m$ and $q = 2\,m$ ½ m

Given $p^2 = q \Rightarrow m^2 = 2\,m \Rightarrow m^2 - 2\,m = 0$

$$\Rightarrow m = 0, 2$$

$$\Rightarrow m = 2 \text{ as } m > 0$$ ½ m

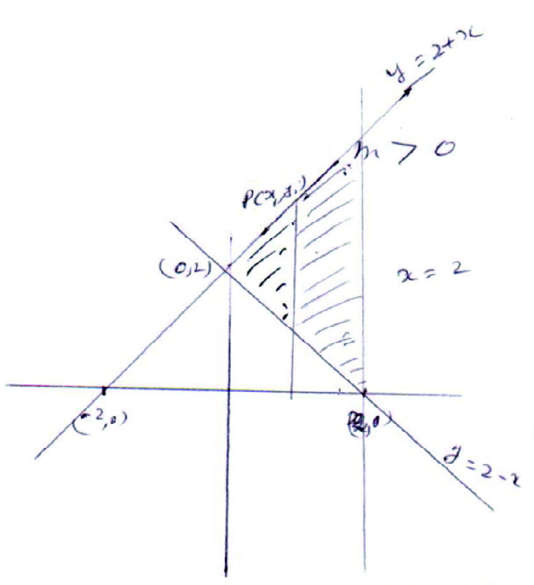
22. $y = 2 + x$ (i)

$y = 2 - x$ (ii)

$x = 2$ (iii),

y_1 is the value of y from (i)

and y_2 is the value of y from (ii)



Required Area $= \int_0^2 (y_1 - y_2)\, dx$ 1 m

correct graph 1+1+1 m

$= \int_0^2 \{(2 + x) - (2 - x)\}\, dx$ correct shading 1 m

$= 2\int_0^2 x\, dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$ ½ m

$= 4$ sq. units ½ m

23. Let the equation of line be $y = m x + c$ 1½ m

the line is at unit distance from the origin

i.e. $\left| \dfrac{0+c}{\sqrt{1+m^2}} \right| = 1 \Rightarrow c = \sqrt{1+m^2}$ 1½ m

$\therefore \; y = m x + \sqrt{1+m^2}$ .... (i) 1 m

$\dfrac{dy}{dx} = m$ 1 m

$\therefore \; y = x \dfrac{dy}{dx} + \sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ 1 m

OR

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+3y^2}{2\,xy} = \dfrac{1+3\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2\left(\dfrac{y}{x}\right)}$ ....(i) 1 m

Differential equation is homogeneous

Put $y = v x$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = v + x \dfrac{dv}{dx}$ 1½ m

$\therefore \; v + x \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1+3v^2}{2v}$ 1 m

$\Rightarrow x \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1+v^2}{2v}$

$\Rightarrow \int \left(\dfrac{2v}{1+v^2}\right) dv = \int \dfrac{dx}{x}$ 1 m

$\Rightarrow \log\left|1+v^2\right| = \log|x| + \log c$ 1 m

$\Rightarrow 1+v^2 = c\,x$

$\Rightarrow 1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = c\,x \quad \text{or} \quad x^2+y^2 = c\,x^3$ ½ m

24. Equation of plane passing through (1, 0, 0)

$a(x-1)+b(y-0)+c(z-0)=0$

or $ax+by+cz-a=0$ .... (i) 1 m

Plane (i) passes throgh (0, 1, 0)

$b-a = 0$ ....(ii) ½ m

Angle between plane (i) and plane $x+y=3$ is $\frac{\pi}{4}$ ½ m

$\therefore \quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{2}}$ 1 m

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{2}}$ 1 m

$\Rightarrow a+b=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$\Rightarrow 2a=\sqrt{2a^2+c^2}$ (using ii)

$\Rightarrow c= \pm\sqrt{2}\,a$ .... (iii) 1 m

$\therefore$ Equation (i) becomes

$a(x-1)+a(y-0)\pm\sqrt{2}\,a(z-0)=0$

$\Rightarrow x+y\pm\sqrt{2}\,z-1 = 0$ ½ m

D.R's of the normal is $1, 1, \pm\sqrt{2}$ ½ m

25. Let E_1, E_2 and E be the events such that

E_1 : students residing in hostel

E_2 : students residing outside hostel 1½ m

E_3 : students getting 'A' grade

$$\therefore \quad P(E_1) = \frac{40}{100}, \quad P(E/E_1) = \frac{50}{100}$$

$$P(E_2) = \frac{60}{100}, \quad P(E/E_2) = \frac{30}{100}$$

2 m

$$P(E_1/E) = \frac{P(E_1) \cdot P(E/E_1)}{P(E_1) \cdot P(E/E_1) + P(E_2)\ \ P(E/E_2)}$$ 1 m

$$= \frac{\frac{40}{100} \times \frac{50}{100}}{\frac{40}{100} \times \frac{50}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{60}{100}}$$ 1 m

$$= \frac{10}{19}$$ ½ m

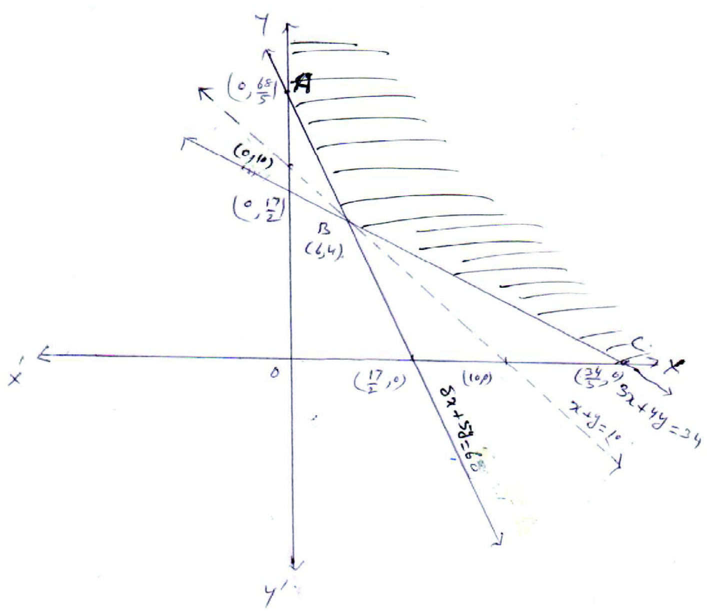
26. Let x be the man helpers and y be the woman helpers

Pay roll : $Z = 225x + 200y$ 1 m

Subject to constraints :

$$\left.\begin{aligned} & x + y \leq 10 \\ & 3x + 4y \geq 34 \\ & 8x + 5y \geq 68 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}\right\}$$ ½×4 =2 m

correct graph : 2 m



At A $\left(0, \frac{68}{5}\right)$, $Z(A) = \text{Rs. } 2720$

At B $(6, 4)$, $Z(B) = \text{Rs. } 2150$ Minimum ½ m

At C $\left(\frac{34}{5}, 0\right)$, $Z(C) = \text{Rs. } 2550$

Minimum $Z = \text{Rs. } 2150$ at $(6, 4)$ ½ m

[Feasible region is unbounded and to check minimum

of Z, $225x + 200y < 2150$

corresponding line is outside of the shaded region]

QUESTION PAPER CODE 65/2/P

EXPECTED ANSWERS/VALUE POINTS

SECTION - A

Marks

1. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)=\left[\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{a}\right]=0$ 1 m

2. $\vec{a}+\vec{b}=3\hat{i}+3\hat{j}$ ½ m

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=3$ ½ m

3. $\frac{x+3}{0}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-2}{-1}$ ½ m

D.Rs are 0, 3, –1 ½ m

4. $|A|=-19$ ½ m

$A^{-1}=-\frac{1}{19}\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -3 & 2\end{pmatrix}$ ½ m

5. $\frac{dy}{dx}=c$ ½ m

$y=x\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ ½ m

6. $\frac{dx}{dy}+\frac{x}{1+y^2}=\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}$ ½ m

I.F. $=e^{\tan^{-1}y}$ ½ m

SECTION - B

7. Let y $=\cos^{-1}\left(\frac{x-x^{-1}}{x-x^{-1}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ 1 m

$$= \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$ 1 m

$$= \pi - 2\tan^{-1}x$$ 1 m

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{1+x^2}$$ 1 m

8. Let $y = \cos^{-1}\left\{\sin\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right\} + x^x$

Let $u = \cos^{-1}\left\{\sin\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right\}$; $v = x^x$

$\therefore$ $y = u + v$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$ ½ m

$$u = \cos^{-1}\left\{\sin\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right\} = \cos^{-1}\left[\cos\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)\right]$$ ½ m

$$= \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+x}} \quad \text{............................ (i)}$$ ½ m

$v = x^x$

$\therefore$ $\log v = x \log x$

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + 1 \log x = 1 + \log x$$

$$\frac{dv}{dx} = x^x \left(1 + \log x\right) \text{ ....(ii)} \qquad 1\tfrac{1}{2}\text{ m}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+x}} + x^x\left(1+\log x\right) \qquad \tfrac{1}{2}\text{ m}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{at } x=1} = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ m}$$

9. $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{2^{\sin x}}{2^{\sin x} + 2^{\cos x}}\, dx \text{ .... (i)}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2^{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{2^{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} + 2^{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}\, dx \left[\text{using} \int_0^a (x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx\right] \qquad 1\tfrac{1}{2}\text{ m}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2^{\cos x}}{2^{\sin x} + 2^{\cos x}}\, dx \text{ ....(ii)} \qquad 1\text{ m}$$

Adding (i) and (ii),

$$2I = \int_0^{\pi/2} 1\, dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \qquad 1\text{ m}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ m}$$

OR

$$I = \int_0^{3/2} \left| x\cos(\pi x)\right| dx$$

$$= \int_0^{1/2} x\cos\pi x\, dx - \int_{1/2}^{3/2} x\cos\pi x\, dx \qquad 1\text{ m}$$

$$= \left[\frac{x\sin\pi x}{\pi}\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{\sin\pi x}{\pi}\, dx - \left[\frac{x\sin\pi x}{\pi}\right]_{1/2}^{3/2} + \int_{1/2}^{3/2} \frac{-\sin\pi x}{\pi}\, dx \qquad 1\tfrac{1}{2}\text{ m}$$

$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi^2}\left[\cos \pi x\right]_0^{1/2} + \frac{3}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi^2}\left[\cos \pi x\right]_{1/2}^{3/2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{3}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} + 0$$ 1 m

$$= \frac{5}{2\pi} - \frac{1}{\pi^2}$$ ½ m

10. $$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} 25 & 12 & 34 \\ 22 & 15 & 28 \\ 26 & 18 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$$ 1½ m

$$= \begin{pmatrix} 850 \\ 805 \\ 970 \end{pmatrix}$$ 1½ m

Any relevant value 1 m

11. $$\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{1-\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}\right\}$$ 1½ m

$$= \cos^{-1}\left\{\frac{a+b-a\tan^2\frac{x}{2}+b\tan^2\frac{x}{2}}{a+b+a\tan^2\frac{x}{2}-b\tan^2\frac{x}{2}}\right\}$$ 1 m

$$= \cos^{-1}\left\{\frac{a\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)+b\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}{a\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+b\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}\right\}$$ ½ m

$$= \cos^{-1}\left\{\frac{a\,\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}+b}{a+b\,\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}\right\}$$ ½ m

$$= \cos^{-1}\left\{\frac{a\cos x+b}{a+b\cos x}\right\}$$ ½ m

OR

$$\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{x-3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+2}{x+3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\dfrac{x-2}{x-3}+\dfrac{x+2}{x+3}}{1-\dfrac{x-2}{x-3}\cdot\dfrac{x+2}{x+3}}\right) = \frac{\pi}{4}$$ 1½ m

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2x^2-12}{-5}\right) = \frac{\pi}{4}$$ 1½ m

$$\Rightarrow \frac{2x^2-12}{-5} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{7}{2}$$ ½ m

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

For writing no solution as $|x| < 1$ ½ m

12. $$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$ 2 m

$$A^2 - 5A + 16\,I = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 15 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$ 1 m

$$= \begin{pmatrix} 11 & -1 & -3 \\ -1 & 9 & -10 \\ -5 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$ 1 m

13. Taking x from R_2, x (x – 1) from R_3 and (x + 1) from C_3

$$\Delta = x^2 (x-1)(x+1) \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & x-1 & 1 \\ -3 & x-2 & 1 \end{vmatrix}$$ 2 m

$$C_2 \to C_2 - x\,C_1 ; \quad C_3 \to C_3 - C,$$

$$= x^2 (x^2-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1-x & -1 \\ -3 & 4x-2 & 4 \end{vmatrix}$$ 1 m

$$= x^2 (x^2-1) \begin{vmatrix} -1(1+x) & -1 \\ 4x-2 & 4 \end{vmatrix}$$ ½ m

$$= 6x^2 (1-x^2)$$ ½ m

14. $$\frac{dx}{dt} = \alpha\left[-2\sin 2t \sin 2t + 2\cos 2t\,(1+\cos 2t)\right]$$ 1 m

$$\frac{dy}{dt} = \beta\left[2\sin 2t\cos 2t - (1-\cos 2t)\cdot 2\sin 2t)\right]$$ 1 m

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt}\right) \Big/ \left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\beta\left(2\sin 4t - 2\sin 2t\right)}{\alpha\left(2\cos 4t + 2\cos 2t\right)}$$ ½+1 m

$$= \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{2\cos 3t \sin t}{2\cos 3t \cos t} = \frac{\beta}{\alpha} \tan t$$ ½ m

15. Here $\begin{vmatrix} b-c-(a-d) & b-a & b+c-(a+d) \\ \alpha-\delta & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta-\gamma & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix}$ 2½ m

$$= 2\begin{vmatrix} b-a & b-a & b+c-a-d \\ \alpha & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix} \quad C_1 \to C_1 + C_3$$ ½ m

$= 0 \quad (\therefore\ C_1 \text{ and } C_2 \text{ are identical})$ ½ m

Hence given lines are coplanar ½ m

OR

D.R's of normal to the plane are $5, -4, 7$ 1 m

D.R's of $y-$axis : $0, 1, 0$ ½ m

If θ is the angle between the plane and y–axis, then

$$\sin\theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$ 1 m

$$= \frac{-4}{3\sqrt{10}}$$ 1 m

$$\therefore\ \theta = \sin^{-1}\left(\frac{-4}{3\sqrt{10}}\right)$$

$$\therefore\ \text{Acute angle is } \sin^{-1}\left(\frac{4}{3\sqrt{10}}\right)$$ ½ m

16. Let E be the event of getting number greater than 4

$$\therefore\ P(E) = \frac{1}{3} \quad \text{and} \quad P(\overline{E}) = \frac{2}{3}$$ ½+½ m

Required Probability $= P\ (\overline{E}\ E \text{ or } \overline{E}\ \overline{E}\ \overline{E}\ E \text{ or } \overline{E}\ \overline{E}\ \overline{E}\ \overline{E}\ \overline{E}\ E \text{ or } ....)$ 1 m

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\frac{1}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$ 1 m

$$= \frac{2}{9}\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty\right]$$ ½ m

$$= \frac{2}{9}\times\frac{9}{5} = \frac{2}{5}$$ ½ m

OR

A = {(5, 6, 1), (5, 6, 2), (5, 6, 3), (5, 6, 4), (5, 6, 5), (5, 6, 6),}

$P(A) = \frac{6}{6\times6\times6} = \frac{1}{36}$, P (B) = P (getting 3 or 4 on the third throw) 1½ m

$A \cap B = \{(5, 6, 3), (5, 6, 4)\} \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{2}{6\times6\times6} = \frac{1}{108}$ 1½ m

$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$ 1 m

17. $I = \int\left(\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right) dx$

$$= \int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x \cos x}} dx$$ 1 m

$$= \sqrt{2}\int\frac{(\cos x + \sin x)}{\sqrt{1-(1-2\sin x \cot x)}} dx$$ 1 m

$$= \sqrt{2}\int\frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{1-(\sin x - \cos x)^2}} dx$$ ½ m

Put $\sin x - \cos x = t \Rightarrow (\cos x + \sin x) dx = dt$ ½ m

$$\therefore\ I = \sqrt{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sqrt{2}\sin^{-1}t + c$$ ½ m

$$= \sqrt{2}\sin^{-1}(\sin x - \cos x) + c$$ ½ m

18. $I = \int \frac{x^3-1}{x\left(x^2+1\right)} dx = \int \left(1 - \frac{x+1}{x\left(x^2+1\right)}\right) dx$ 1 m

$= x - \int \frac{x+1}{x\left(x^2+1\right)} dx$ ½ m

$= x - I_1$

Let $\frac{x+1}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{1}{x} + \frac{1-x}{x^2+1}$ 1 m

$\therefore\ I_1 = \int \frac{1}{x} + \frac{(1-x)}{x^2+1} dx = \log x - \frac{1}{2}\log\left|x^2+1\right| + \tan^{-1}x$ 1 m

$\therefore\ I = x - \log|x| + \frac{1}{2}\log\left|x^2+1\right| - \tan^{-1}x + c$ ½ m

19. Here $\left.\begin{aligned} \vec{AB} &= -4\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k} \\ \vec{AC} &= -\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k} \\ \vec{AD} &= -8\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k} \end{aligned}\right\}$ 1½ m

For them to be coplanar, $\left[\vec{AB}\ \vec{AC}\ \vec{AD}\right] = 0$ 1½ m

i.e. $\begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -60 + 126 - 66 = 0$ ½ m

$\therefore$ Points A, B, C and D are coplanar ½ m

SECTION - C

20. Let the equation of line be $y = mx + c$ 1½ m

the line is at unit distance from the origin i.e. $\left|\dfrac{0+c}{\sqrt{1+m^2}}\right| = 1 \Rightarrow c = \sqrt{1+m^2}$ 1½ m

$\therefore \quad y = m\,x + \sqrt{1+m^2}$ .... (i) 1 m

$\dfrac{dy}{dx} = m$ 1 m

$\therefore \quad y = x\,\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ 1 m

OR

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+3y^2}{2\,xy} = \dfrac{1+3\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2\left(\dfrac{y}{x}\right)}$ ....(i) 1 m

Differential equation is homogeneous

Put $y = v\,x$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = v + x\,\dfrac{dv}{dx}$ 1½ m

$\therefore \quad v + x\,\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1+3v^2}{2v}$ 1 m

$\Rightarrow \quad x\,\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1+v^2}{2v}$

$\Rightarrow \int\left(\dfrac{2v}{1+v^2}\right)dv = \int\dfrac{dx}{x}$ 1 m

$\Rightarrow \quad \log\left|1+v^2\right| = \log|x| + \log c$ 1 m

$\Rightarrow \quad 1+v^2 = c\,x$

$\Rightarrow \quad 1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = c\,x \quad \text{or} \quad x^2+y^2 = c\,x^3$ ½ m

21. Equation of plane passing through (1, 0, 0)

$a(x-1)+b(y-0)+c(z-0)=0$

or $ax+by+cz-a=0$ .... (i) 1 m

Plane (i) passes throgh (0, 1, 0)

$b-a = 0$ ....(ii) ½ m

Angle between plane (i) and plane $x+y=3$ is $\frac{\pi}{4}$ ½ m

$\therefore \quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{2}}$ 1 m

$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{2}}$ 1 m

$\Rightarrow \quad a+b=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$\Rightarrow \quad 2a=\sqrt{2a^2+c^2}$ (using ii)

$\Rightarrow \quad c=\pm\sqrt{2}\,a$ .... (iii) 1 m

$\therefore$ Equation (i) becomes

$a(x-1)+a(y-0)\pm\sqrt{2}\,a(z-0)=0$

$\Rightarrow \quad x+y\pm\sqrt{2}\,z-1 = 0$ ½ m

D.R's of the normal is $1, 1, \pm\sqrt{2}$ ½ m

22. Let $y=(fog)(x)$ [say $y=h(x)$]

$= f[g(x)] = f(x^3+5)$ 2½ m

$= 2(x^3+5)-3$

$= 2x^3+7$ 2½ m

$\therefore \quad x = \sqrt[3]{\frac{y-7}{2}} = h^{-1}(y)$ ½ m

$\therefore \quad (fog)^{-1} = \sqrt[3]{\frac{x-7}{2}}$ ½ m

OR

Let (x, y) be the identity element in $Q \times Q$, then

$(a, b) * (x, y) = (a, b) = (x, y) * (a, b) \;\; \forall \;\; (a, b) \in Q \times Q$ 1½ m

$\Rightarrow \quad (ax, b + ay) = (a, b)$

$\Rightarrow \quad a = ax \;\; \text{and} \;\; b = b + ay$

$\Rightarrow \quad x = 1 \;\; \text{and} \;\; y = 0$ 1 m

$\therefore$ (1, 0) is the identity element in $Q \times Q$ ½ m

Let (a, b) be the invertible element in $Q \times Q$, then

there exists $(\alpha, \beta) \in Q \times Q$ such that

$(a, b) * (\alpha, \beta) = (\alpha, \beta) * (a, b) = (1, 0)$ 1½ m

$\Rightarrow \quad (a\alpha, b + a\beta) = (1, 0)$ 1 m

$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{a}, \; \beta = -\frac{b}{a}$

$\therefore$ the invertible element in A is $\left(\frac{1}{a}, \; -\frac{b}{a}\right)$ ½ m

23. $f(x) = 2x^3 - 9mx^2 + 12m^2x + 1, \; m > 0$

$f'(x) = 6x^2 - 18mx + 12m^2$ 1 m

$f''(x) = 12x - 18m$ 1 m

For Max. or minimum, $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 18mx + 12m^2 = 0$

$\Rightarrow (x - 2m)(x - m) = 0$

$\Rightarrow \; x = m \text{ or } 2m$ 1 m

At $x = m,\ f''(x) = 12m - 18m = -\text{ve} \Rightarrow x = m$ is a maxima 1 m

At $x = 2\,m,\ f''(x) = 24m - 18m = +\text{ve} \Rightarrow x = 2m$ is manimum 1 m

$\therefore\ p = m$ and $q = 2\,m$ ½ m

Given $p^2 = q \Rightarrow m^2 = 2\,m \Rightarrow m^2 - 2\,m = 0$

$\Rightarrow m = 0, 2$

$\Rightarrow m = 2$ as $m > 0$ ½ m

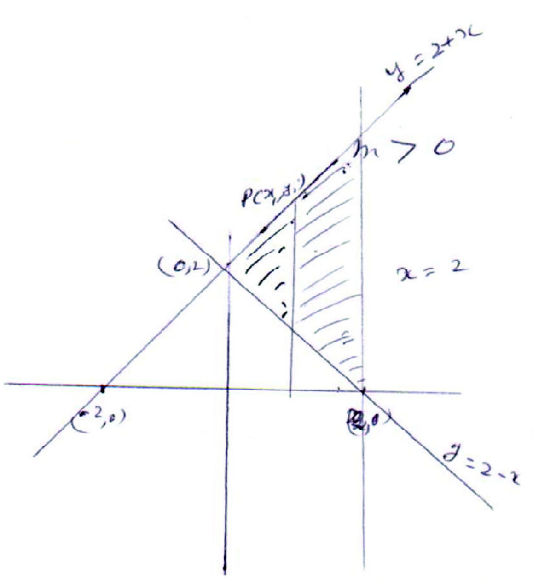
24. $y = 2 + x$ (i)

$y = 2 - x$ (ii)

$x = 2$ (iii),

y_1 is the value of y from (i)

and y_2 is the value of y from (ii)



Required Area $= \int_0^2 (y_1 - y_2)\,dx$ 1 m

correct graph 1+1+1 m

$= \int_0^2 \{(2 + x) - (2 - x)\}\,dx$ correct shading 1 m

$= 2\int_0^2 x\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$ ½ m

$= 4$ sq. units ½ m

25. Let x be the man helpers and y be the woman helpers

Pay roll : $Z = 225\,x + 200\,y$ 1 m

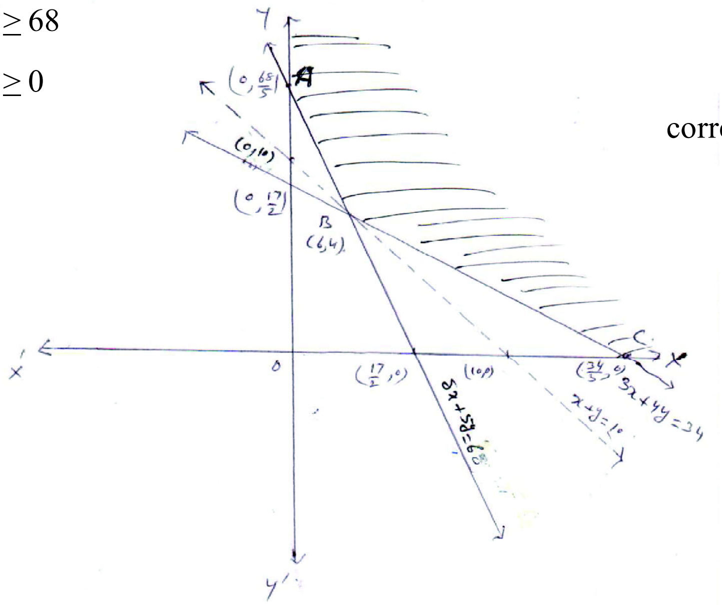
Subject to constraints :

$x + y \leq 10$

$3x + 4y \geq 34$ ½×4 =2 m

$8x + 5y \geq 68$

$x \geq 0, y \geq 0$



correct graph : 2 m

At A $\left(0, \frac{68}{5}\right)$, Z (A) = Rs. 2720

At B (6, 4), Z (B) = Rs. 2150 Minimum ½ m

At C $\left(\frac{34}{5}, 0\right)$, Z (C) = Rs. 2550

Minimum Z = Rs. 2150 at (6, 4) ½ m

[Feasible region is unbounded and to check minimum

of Z, $225x + 200y < 2150$

corresponding line is outside of the shaded region]

26. Let E_1, E_2 and E be the events such that

E_1 : students residing in hostel

E_2 : students residing outside hostel 1½ m

E_3 : students getting 'A' grade

$\therefore \quad P(E_1) = \dfrac{40}{100}, \quad P(E/E_1) = \dfrac{50}{100}$

2 m

$P(E_2) = \dfrac{60}{100}, \quad P(E/E_2) = \dfrac{30}{100}$

$$P(E_1/E) = \frac{P(E_1) \cdot P(E/E_1)}{P(E_1) \cdot P(E/E_1) + P(E_2)\ P(E/E_2)}$$ 1 m

$$= \frac{\frac{40}{100} \times \frac{50}{100}}{\frac{40}{100} \times \frac{50}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{60}{100}}$$ 1 m

$$= \frac{10}{19}$$ ½ m

QUESTION PAPER CODE 65/3/P

EXPECTED ANSWERS/VALUE POINTS

SECTION - A

Marks

1.	$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}$	½ m
	I.F. $= e^{\tan^{-1} y}$	½ m
2.	$\lvert A \rvert = -19$	½ m
	$A^{-1} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	½ m
3.	$\frac{dy}{dx} = c$	½ m
	$y = x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$	½ m
4.	$\frac{x+3}{0} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-2}{-1}$	½ m
	D.Rs are 0, 3, –1	½ m
5.	$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a}] = 0$	1 m
6.	$\vec{a} + \vec{b} = 3\hat{i} + 3\hat{j}$	½ m
	$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 3$	½ m

SECTION - B

7. Here $\left.\begin{aligned} \vec{AB} &= -4\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k} \\ \vec{AC} &= -\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k} \\ \vec{AD} &= -8\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k} \end{aligned}\right\}$ 1½ m

For them to be coplanar, $\left[\vec{AB}\ \ \vec{AC}\ \ \vec{AD}\right] = 0$ 1½ m

i.e. $\begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -60 + 126 - 66 = 0$ ½ m

$\therefore$ Points A, B, C and D are coplanar ½ m

8. Here $\begin{vmatrix} b-c-(a-d) & b-a & b+c-(a+d) \\ \alpha-\delta & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta-\gamma & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix}$ 2½ m

$= 2\begin{vmatrix} b-a & b-a & b+c-a-d \\ \alpha & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix} \quad C_1 \to C_1 + C_3$ ½ m

$= 0 \quad (\because\ C_1 \text{ and } C_2 \text{ are identical})$ ½ m

Hence given lines are coplanar ½ m

OR

D.R's of normal to the plane are $5, -4, 7$ 1 m

D.R's of y – axis : $0, 1, 0$ ½ m

If θ is the angle between the plane and y–axis, then

$$\sin\theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$ 1 m

$$= \frac{-4}{3\sqrt{10}}$$ 1 m

$$\therefore\ \theta = \sin^{-1}\left(\frac{-4}{3\sqrt{10}}\right)$$

$\therefore$ Acute angle is $\sin^{-1}\left(\dfrac{4}{3\sqrt{10}}\right)$ ½ m

9. Let E be the event of getting number greater than 4

$\therefore \quad P(E) = \frac{1}{3} \quad$ and $\quad P(\overline{E}) = \frac{2}{3}$ ½+½ m

Required Probability $= P\,(\overline{E}\,E \text{ or } \overline{E}\,\overline{E}\,\overline{E}\,E \text{ or } \overline{E}\,\overline{E}\,\overline{E}\,\overline{E}\,\overline{E}\,E \text{ or } \ldots)$ 1 m

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \frac{1}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$ 1 m

$$= \frac{2}{9}\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots \infty\right]$$ ½ m

$$= \frac{2}{9} \times \frac{9}{5} = \frac{2}{5}$$ ½ m

OR

A = {(5, 6, 1), (5, 6, 2), (5, 6, 3), (5, 6, 4), (5, 6, 5), (5, 6, 6),}

$P(A) = \frac{6}{6\times 6\times 6} = \frac{1}{36}$, P (B) = P (getting 3 or 4 on the third throw) 1½ m

$A \cap B = \{(5, 6, 3), (5, 6, 4)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{6\times 6\times 6} = \frac{1}{108}$ 1½ m

$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$ 1 m

10. Let $y = \cos^{-1}\left(\frac{x - x^{-1}}{x - x^{-1}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$ 1 m

$$= \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$$ 1 m

$$= \pi - 2\tan^{-1}x$$ 1 m

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{1 + x^2}$$ 1 m

11. Let $y = \cos^{-1}\left\{\sin\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right\} + x^x$

Let $u = \cos^{-1}\left\{\sin\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right\}; \quad v = x^x$

$\therefore \quad y = u + v$

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ ½ m

$u = \cos^{-1}\left\{\sin\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right\} = \cos^{-1}\left[\cos\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)\right]$ ½ m

$= \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

$\therefore \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+x}}$ .... (i) ½ m

$v = x^x$

$\therefore \quad \log v = x \log x$

$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + 1 \log x = 1 + \log x$

$\frac{dv}{dx} = x^x (1 + \log x)$ ....(ii) 1½ m

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+x}} + x^x (1 + \log x)$ ½ m

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{at } x=1} = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$ ½ m

12. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{2^{\sin x}}{2^{\sin x} + 2^{\cos x}} \, dx$ .... (i)

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2^{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{2^{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + 2^{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}} \, dx \left[\text{using} \int_0^a (x)\, dx = \int_0^a f(a - x)\, dx\right]$$ 1½ m

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2^{\cos x}}{2^{\sin x} + 2^{\cos x}} \, dx$$ ....(ii) 1 m

Adding (i) and (ii),

$$2I = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$ 1 m

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$ ½ m

OR

$$I = \int_0^{3/2} |x \cos(\pi x)| \, dx$$

$$= \int_0^{1/2} x \cos \pi x \, dx - \int_{1/2}^{3/2} x \cos \pi x \, dx$$ 1 m

$$= \left[\frac{x \sin \pi x}{\pi}\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{\sin \pi x}{\pi} dx - \left[\frac{x \sin \pi x}{\pi}\right]_{1/2}^{3/2} + \int_{1/2}^{3/2} \frac{-\sin \pi x}{\pi} dx$$ 1½ m

$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi^2}[\cos \pi x]_0^{1/2} + \frac{3}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi^2}[\cos \pi x]_{1/2}^{3/2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{3}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} + 0$$ 1 m

$$= \frac{5}{2\pi} - \frac{1}{\pi^2}$$ ½ m

13. $I = \int\left(\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right) dx$

$= \int \dfrac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x \cos x}} dx$ 1 m

$= \sqrt{2} \int \dfrac{(\cos x + \sin x)}{\sqrt{1-(1-2 \sin x \cot x)}} dx$ 1 m

$= \sqrt{2} \int \dfrac{\cos x + \sin x}{\sqrt{1-(\sin x - \cos x)^2}} dx$ ½ m

Put $\sin x - \cos x = t \Rightarrow (\cos x + \sin x) dx = dt$ ½ m

$\therefore\ I = \sqrt{2} \int \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sqrt{2} \sin^{-1} t + c$ ½ m

$= \sqrt{2} \sin^{-1}(\sin x - \cos x) + c$ ½ m

14. $I = \int \dfrac{x^3 - 1}{x(x^2+1)} dx = \int \left(1 - \dfrac{x+1}{x(x^2+1)}\right) dx$ 1 m

$= x - \int \dfrac{x+1}{x(x^2+1)} dx$ ½ m

$= x - I_1$

Let $\dfrac{x+1}{x(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx + C}{x^2+1} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1-x}{x^2+1}$ 1 m

$\therefore\ I_1 = \int \dfrac{1}{x} + \dfrac{(1-x)}{x^2+1} dx = \log x - \dfrac{1}{2} \log\left| x^2+1 \right| + \tan^{-1} x$ 1 m

$\therefore\ I = x - \log\left| x \right| + \dfrac{1}{2} \log\left| x^2+1 \right| - \tan^{-1} x + c$ ½ m

15. $\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 25 & 12 & 34 \\ 22 & 15 & 28 \\ 26 & 18 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$ 1½ m

$= \begin{pmatrix} 850 \\ 805 \\ 970 \end{pmatrix}$ 1½ m

Any relevant value 1 m

16. $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{1-\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}\right\}$ 1½ m

$= \cos^{-1}\left\{\frac{a+b-a\tan^2\frac{x}{2}+b\tan^2\frac{x}{2}}{a+b+a\tan^2\frac{x}{2}-b\tan^2\frac{x}{2}}\right\}$ 1 m

$= \cos^{-1}\left\{\frac{a\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)+b\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}{a\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+b\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}\right\}$ ½ m

$= \cos^{-1}\left\{\frac{a\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}+b}{a+b\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}\right\}$ ½ m

$= \cos^{-1}\left\{\frac{a\cos x+b}{a+b\cos x}\right\}$ ½ m

OR

$$\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{x-3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+2}{x+3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\frac{x-2}{x-3}+\frac{x+2}{x+3}}{1-\frac{x-2}{x-3}\cdot\frac{x+2}{x+3}}\right) = \frac{\pi}{4}$$ 1½ m

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2x^2-12}{-5}\right) = \frac{\pi}{4}$$ 1½ m

$$\Rightarrow \frac{2x^2-12}{-5} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{7}{2}$$ ½ m

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

For writing no solution as $|x| < 1$ ½ m

17. $$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$ 2 m

$$A^2 - 5A + 16\,I = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 15 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$ 1 m

$$= \begin{pmatrix} 11 & -1 & -3 \\ -1 & 9 & -10 \\ -5 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$ 1 m

18. Taking x from R_2, x (x – 1) from R_3 and (x + 1) from C_3

$$\Delta = x^2 (x-1)(x+1) \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & x-1 & 1 \\ -3 & x-2 & 1 \end{vmatrix}$$ 2 m

$$C_2 \to C_2 - x\,C_1 ; \quad C_3 \to C_3 - C,$$

$$= x^2 (x^2-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1-x & -1 \\ -3 & 4x-2 & 4 \end{vmatrix}$$ 1 m

$$= x^2 (x^2-1) \begin{vmatrix} -1\,(1+x) & -1 \\ 4x-2 & 4 \end{vmatrix}$$ ½ m

$$= 6x^2 (1-x^2)$$ ½ m

19. $$\frac{dx}{dt} = \alpha\left[-2\sin 2t \sin 2t + 2\cos 2t\,(1+\cos 2t)\right]$$ 1 m

$$\frac{dy}{dt} = \beta\left[2\sin 2t \cos 2t - (1-\cos 2t)\cdot 2\sin 2t)\right]$$ 1 m

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt}\right) \Big/ \left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\beta\left(2\sin 4t - 2\sin 2t\right)}{\alpha\left(2\cos 4t + 2\cos 2t\right)}$$ ½+1 m

$$= \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{2\cos 3t \sin t}{2\cos 3t \cos t} = \frac{\beta}{\alpha}\tan t$$ ½ m

SECTION - C

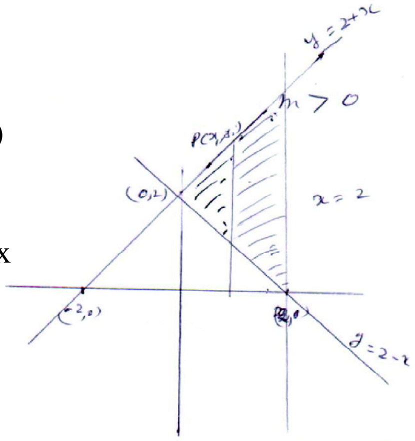
20. $y = 2 + x$ (i)

$y = 2 - x$ (ii)

$x = 2$ (iii),

y_1 is the value of y from (i)

and y_2 is the value of y from (ii)



Required Area $= \int_0^2 (y_1 - y_2)\, dx$ 1 m

correct graph 1+1+1 m

$= \int_0^2 \{(2+x) - (2-x)\}\, dx$ correct shading 1 m

$= 2\int_0^2 x\, dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$ ½ m

$=$ 4 sq. units ½ m

21. Let the equation of line be $y = mx + c$ 1½ m

the line is at unit distance from the origin

i.e. $\left|\frac{0+c}{\sqrt{1+m^2}}\right| = 1 \Rightarrow c = \sqrt{1+m^2}$ 1½ m

$\therefore \quad y = m\,x + \sqrt{1+m^2}$ .... (i) 1 m

$\frac{dy}{dx} = m$ 1 m

$\therefore \quad y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ 1 m

OR

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3y^2}{2\,xy} = \frac{1+3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$ ....(i) 1 m

Differential equation is homogeneous

Put y = v x

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$ 1½ m

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v^2}{2v}$$ 1 m

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v}$$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{2v}{1+v^2}\right) dv = \int \frac{dx}{x}$$ 1 m

$$\Rightarrow \log\left|1+v^2\right| = \log|x| + \log c$$ 1 m

$$\Rightarrow 1+v^2 = c\,x$$

$$\Rightarrow 1+\left(\frac{y}{x}\right)^2 = c\,x \quad \text{or} \quad x^2+y^2 = c\,x^3$$ ½ m

22. Let x be the man helpers and y be the woman helpers

Pay roll : Z = 225 x + 200 y 1 m

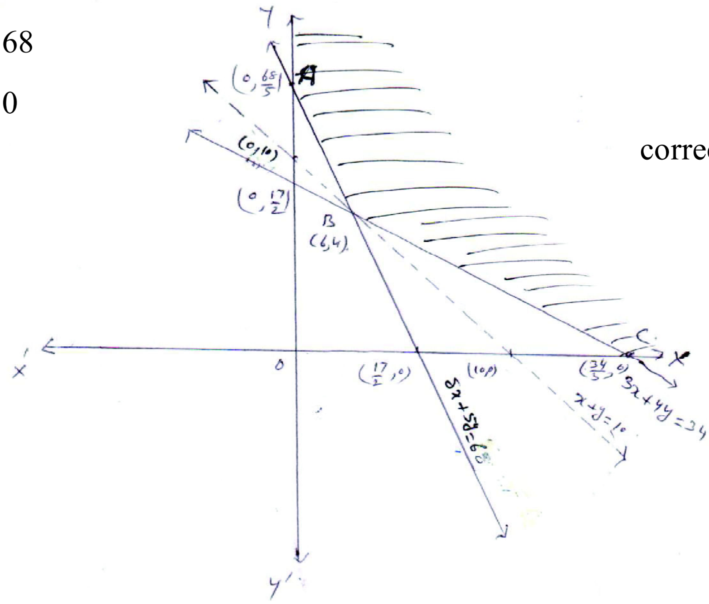
Subject to constraints :

$x + y \leq 10$

$3x + 4y \geq 34$ ½×4 =2 m

$8x + 5y \geq 68$

$x \geq 0, y \geq 0$



correct graph : 2 m

At A $\left(0, \frac{68}{5}\right)$, $Z(A) = \text{Rs. } 2720$

At B $(6, 4)$, $Z(B) = \text{Rs. } 2150$ Minimum ½ m

At C $\left(\frac{34}{5}, 0\right)$, $Z(C) = \text{Rs. } 2550$

Minimum $Z = \text{Rs. } 2150$ at $(6, 4)$ ½ m

[Feasible region is unbounded and to check minimum

of Z, $225x + 200y < 2150$

corresponding line is outside of the shaded region]

23. Equation of plane passing through (1, 0, 0)

$a(x-1) + b(y-0) + c(z-0) = 0$

or $ax + by + cz - a = 0$ .... (i) 1 m

Plane (i) passes throgh (0, 1, 0)

$b - a = 0$ ....(ii) ½ m

Angle between plane (i) and plane $x + y = 3$ is $\frac{\pi}{4}$ ½ m

$$\therefore \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{2}}$$ 1 m

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{2}}$$ 1 m

$$\Rightarrow a + b = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Rightarrow 2a = \sqrt{2a^2+c^2} \quad \text{(using ii)}$$

$\Rightarrow \quad c = \pm\sqrt{2}\, a$ .... (iii) 1 m

$\therefore$ Equation (i) becomes

$a(x-1) + a(y-0) \pm \sqrt{2}\, a(z-0) = 0$

$\Rightarrow \quad x + y \pm \sqrt{2}\, z - 1 = 0$ ½ m

D.R's of the normal is $1, 1, \pm\sqrt{2}$ ½ m

24. Let E_1, E_2 and E be the events such that

E_1 : students residing in hostel

E_2 : students residing outside hostel 1½ m

E_3 : students getting 'A' grade

$\therefore \quad P(E_1) = \frac{40}{100}, \quad P(E/E_1) = \frac{50}{100}$

2 m

$P(E_2) = \frac{60}{100}, \quad P(E/E_2) = \frac{30}{100}$

$$P(E_1/E) = \frac{P(E_1)\cdot P(E/E_1)}{P(E_1)\cdot P(E/E_1) + P(E_2)\ P(E/E_2)}$$ 1 m

$$= \frac{\frac{40}{100}\times\frac{50}{100}}{\frac{40}{100}\times\frac{50}{100}+\frac{30}{100}\times\frac{60}{100}}$$ 1 m

$$= \frac{10}{19}$$ ½ m

25. Let $y = (fog)(x)$ [say $y = h(x)$]

$= f[g(x)] = f(x^3+5)$ 2½ m

$= 2(x^3+5) - 3$

$= 2x^3 + 7$ 2½ m

$\therefore \quad x = \sqrt[3]{\frac{y-7}{2}} = h^{-1}(y)$ ½ m

$\therefore \quad (fog)^{-1} = \sqrt[3]{\frac{x-7}{2}}$ ½ m

OR

Let (x, y) be the identity element in $Q \times Q$, then

$(a, b) * (x, y) = (a, b) = (x, y) * (a, b) \;\; \forall \;\; (a, b) \in Q \times Q$ 1½ m

$\Rightarrow \quad (ax, b + ay) = (a, b)$

$\Rightarrow \quad a = ax \quad \text{and} \quad b = b + ay$

$\Rightarrow \quad x = 1 \quad \text{and} \quad y = 0$ 1 m

$\therefore \quad (1, 0)$ is the identity element in $Q \times Q$ ½ m

Let (a, b) be the invertible element in $Q \times Q$, then

there exists $(\alpha, \beta) \in Q \times Q$ such that

$(a, b) * (\alpha, \beta) = (\alpha, \beta) * (a, b) = (1, 0)$ 1½ m

$\Rightarrow \quad (a\alpha, b + a\beta) = (1, 0)$ 1 m

$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{a}, \; \beta = -\frac{b}{a}$

$\therefore$ the invertible element in A is $\left(\frac{1}{a}, \; -\frac{b}{a}\right)$ ½ m

26. $f(x) = 2x^3 - 9\,m\,x^2 + 12\,m^2\,x + 1, \; m > 0$

$f'(x) = 6x^2 - 18\,m\,x + 12\,m^2$ 1 m

$f''(x) = 12x - 18\,m$ 1 m

For Max. or minimum, $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 18\,m\,x + 12\,m^2 = 0$

$\Rightarrow (x - 2\,m)(x - m) = 0$

$\Rightarrow x = m \text{ or } 2\,m$ 1 m

At $x = m$, $f''(x) = 12m - 18m = -ve \Rightarrow x = m$ is a maxima 1 m

At $x = 2m$, $f''(x) = 24m - 18m = +ve \Rightarrow x = 2m$ is manimum 1 m

$\therefore \quad p = m$ and $q = 2m$ ½ m

Given $p^2 = q \Rightarrow m^2 = 2m \Rightarrow m^2 - 2m = 0$

$\Rightarrow m = 0, 2$

$\Rightarrow m = 2$ as $m > 0$ ½ m