

रोल नं. 

|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|

  
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ 12 हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में 29 प्रश्न हैं ।
- कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains 12 printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains 29 questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

## गणित

## MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे

Time allowed : 3 hours

65/1

अधिकतम अंक : 100

Maximum Marks : 100

## सामान्य निर्देश :

- (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
- (ii) इस प्रश्न पत्र में 29 प्रश्न हैं जो चार खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब, स तथा द । खण्ड अ में 4 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक एक अंक का है । खण्ड ब में 8 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक दो अंक का है । खण्ड स में 11 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक चार अंक का है । खण्ड द में 6 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक छः अंक का है ।
- (iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकतानुसार दिए जा सकते हैं ।
- (iv) पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले 3 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 3 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।
- (v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है । यदि आवश्यक हो, तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं ।

## General Instructions :

- (i) *All questions are compulsory.*
- (ii) *The question paper consists of 29 questions divided into four sections A, B, C and D. Section A comprises of 4 questions of **one mark** each, Section B comprises of 8 questions of **two marks** each, Section C comprises of 11 questions of **four marks** each and Section D comprises of 6 questions of **six marks** each.*
- (iii) *All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*
- (iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 3 questions of four marks each and 3 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.*
- (v) *Use of calculators is **not** permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.*

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 4 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

Question numbers 1 to 4 carry 1 mark each.

1. यदि किसी  $2 \times 2$  वर्ग आव्यूह A के लिए,  $A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$  है, तो  $|A|$  का मान लिखिए ।

If for any  $2 \times 2$  square matrix A,  $A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ , then write the value of  $|A|$ .

2. 'k' का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निम्नलिखित फलन  $x = 3$  पर संतत है :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+3)^2 - 36}{x-3} & , x \neq 3 \\ k & , x = 3 \end{cases}$$

Determine the value of 'k' for which the following function is continuous at  $x = 3$  :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+3)^2 - 36}{x-3} & , x \neq 3 \\ k & , x = 3 \end{cases}$$

3. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} dx$$

Find :

$$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} dx$$

4. समतलों  $2x - y + 2z = 5$  तथा  $5x - 2.5y + 5z = 20$  के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

Find the distance between the planes  $2x - y + 2z = 5$  and  $5x - 2.5y + 5z = 20$ .

### खण्ड ब

### SECTION B

प्रश्न संख्या 5 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न के 2 अंक हैं ।

Question numbers 5 to 12 carry 2 marks each.

5. यदि A कोटि 3 का एक विषम-सममित आव्यूह है, तो सिद्ध कीजिए कि  $\det A = 0$ .

If A is a skew-symmetric matrix of order 3, then prove that  $\det A = 0$ .

6. फलन  $f(x) = x^3 - 3x$ ,  $[-\sqrt{3}, 0]$  के लिए रोले के प्रमेय के प्रयोग से c का मान ज्ञात कीजिए ।

Find the value of c in Rolle's theorem for the function  $f(x) = x^3 - 3x$  in  $[-\sqrt{3}, 0]$ .

7. एक घन का आयतन 9 घन सेमी/से. की दर से बढ़ रहा है । जब घन की भुजा 10 सेमी है, तो उसके पृष्ठीय क्षेत्रफल में बढ़ोतरी की दर ज्ञात कीजिए ।

The volume of a cube is increasing at the rate of  $9 \text{ cm}^3/\text{s}$ . How fast is its surface area increasing when the length of an edge is 10 cm ?

8. दर्शाइए कि फलन  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 100$ ,  $\mathbb{R}$  पर वर्धमान है ।

Show that the function  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 100$  is increasing on  $\mathbb{R}$ .

9. बिंदुओं  $P(2, 2, 1)$  तथा  $Q(5, 1, -2)$  को मिलाने वाली रेखा पर स्थित एक बिंदु का  $x$ -निर्देशांक 4 है । उसका  $z$ -निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

The  $x$ -coordinate of a point on the line joining the points  $P(2, 2, 1)$  and  $Q(5, 1, -2)$  is 4. Find its  $z$ -coordinate.

10. एक पासा, जिसके फलकों पर अंक 1, 2, 3 लाल रंग में लिखे हैं तथा 4, 5, 6 हरे रंग में लिखे हैं, को उछाला गया । माना घटना A है : “प्राप्त संख्या सम है” तथा घटना B है : “प्राप्त संख्या लाल है” । ज्ञात कीजिए कि क्या A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं ।

A die, whose faces are marked 1, 2, 3 in red and 4, 5, 6 in green, is tossed. Let A be the event “number obtained is even” and B be the event “number obtained is red”. Find if A and B are independent events.

11. दो दर्जी, A तथा B, प्रतिदिन क्रमशः ₹ 300 तथा ₹ 400 कमाते हैं । A एक दिन में 6 कमीजें तथा 4 पैंटें सिल सकता है जबकि B प्रतिदिन 10 कमीजें तथा 4 पैंटें सिल सकता है । यह ज्ञात करने के लिए कि कम-से-कम 60 कमीजें तथा 32 पैंटें सिलने के लिए प्रत्येक कितने दिन कार्य करे कि श्रम लागत कम-से-कम हो, रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए ।

Two tailors, A and B, earn ₹ 300 and ₹ 400 per day respectively. A can stitch 6 shirts and 4 pairs of trousers while B can stitch 10 shirts and 4 pairs of trousers per day. To find how many days should each of them work and if it is desired to produce at least 60 shirts and 32 pairs of trousers at a minimum labour cost, formulate this as an LPP.

12. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{dx}{5 - 8x - x^2}$$

Find :

$$\int \frac{dx}{5 - 8x - x^2}$$

खण्ड स

SECTION C

प्रश्न संख्या 13 से 23 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।

Question numbers 13 to 23 carry 4 marks each.

13. यदि  $\tan^{-1} \frac{x-3}{x-4} + \tan^{-1} \frac{x+3}{x+4} = \frac{\pi}{4}$  है, तो  $x$  का मान ज्ञात कीजिए ।

If  $\tan^{-1} \frac{x-3}{x-4} + \tan^{-1} \frac{x+3}{x+4} = \frac{\pi}{4}$ , then find the value of  $x$ .

14. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर, सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a^2 + 2a & 2a + 1 & 1 \\ 2a + 1 & a + 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a - 1)^3$$

अथवा

आव्यूह A ज्ञात कीजिए कि

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$$

Using properties of determinants, prove that

$$\begin{vmatrix} a^2 + 2a & 2a + 1 & 1 \\ 2a + 1 & a + 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a - 1)^3$$

OR

Find matrix A such that

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$$

15. यदि  $x^y + y^x = a^b$  है, तो  $\frac{dy}{dx}$  ज्ञात कीजिए ।

अथवा

यदि  $e^y(x+1) = 1$  है, तो दर्शाइए कि  $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ .

If  $x^y + y^x = a^b$ , then find  $\frac{dy}{dx}$ .

OR

If  $e^y(x+1) = 1$ , then show that  $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ .

16. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\cos \theta}{(4 + \sin^2 \theta)(5 - 4 \cos^2 \theta)} d\theta$$

Find :

$$\int \frac{\cos \theta}{(4 + \sin^2 \theta)(5 - 4 \cos^2 \theta)} d\theta$$

17. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_1^4 \{ |x-1| + |x-2| + |x-4| \} dx$$

Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

**OR**

Evaluate :

$$\int_1^4 \{ |x-1| + |x-2| + |x-4| \} dx$$

18. अवकल समीकरण  $(\tan^{-1} x - y) dx = (1 + x^2) dy$  को हल कीजिए ।

Solve the differential equation  $(\tan^{-1} x - y) dx = (1 + x^2) dy$ .

19. दर्शाइए कि बिंदु A, B, C जिनके स्थिति सदिश क्रमशः  $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ,  $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$  तथा  $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$  हैं, एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं । अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Show that the points A, B, C with position vectors  $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ,  $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$  and  $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$  respectively, are the vertices of a right-angled triangle. Hence find the area of the triangle.

20.  $\lambda$  का मान ज्ञात कीजिए ताकि चार बिंदु जिनके स्थिति सदिश  $3\hat{i} + 6\hat{j} + 9\hat{k}$ ,  $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ,  $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$  तथा  $4\hat{i} + 6\hat{j} + \lambda\hat{k}$  समतलीय हैं ।

Find the value of  $\lambda$ , if four points with position vectors  $3\hat{i} + 6\hat{j} + 9\hat{k}$ ,  $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ,  $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$  and  $4\hat{i} + 6\hat{j} + \lambda\hat{k}$  are coplanar.



21. 4 कार्ड हैं जिन पर संख्याएँ 1, 3, 5 तथा 7 अंकित हैं, एक कार्ड पर एक संख्या । दो कार्ड प्रतिस्थापना किए बिना यादृच्छया निकाले गए । माना X निकाले गए दो कार्डों पर लिखी संख्याओं का योगफल है । X का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए ।

There are 4 cards numbered 1, 3, 5 and 7, one number on one card. Two cards are drawn at random without replacement. Let X denote the sum of the numbers on the two drawn cards. Find the mean and variance of X.

22. एक विद्यालय के विद्यार्थियों के लिए ज्ञात है कि 30% विद्यार्थियों की 100% उपस्थिति है तथा 70% विद्यार्थी अनियमित हैं । पिछले वर्ष के परिणाम सूचित करते हैं कि उन सभी विद्यार्थियों, जिनकी उपस्थिति 100% है, में से 70% ने वार्षिक परीक्षा में A ग्रेड पाया तथा अनियमित विद्यार्थियों में से 10% ने A ग्रेड पाया । वर्ष के अंत में, विद्यालय में से एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना गया तथा यह पाया गया कि उसका A ग्रेड था । प्रायिकता क्या है कि उस विद्यार्थी की 100% उपस्थिति है ? क्या नियमितता केवल विद्यालय में आवश्यक है ? अपने उत्तर के पक्ष में तर्क दीजिए ।

Of the students in a school, it is known that 30% have 100% attendance and 70% students are irregular. Previous year results report that 70% of all students who have 100% attendance attain A grade and 10% irregular students attain A grade in their annual examination. At the end of the year, one student is chosen at random from the school and he was found to have an A grade. What is the probability that the student has 100% attendance ? Is regularity required only in school ? Justify your answer.

23.  $Z = x + 2y$  का अधिकतमीकरण कीजिए

निम्न अवरोधों के अंतर्गत

$$x + 2y \geq 100$$

$$2x - y \leq 0$$

$$2x + y \leq 200$$

$$x, y \geq 0$$

उपर्युक्त रैखिक प्रोग्रामन समस्या को आलेख की सहायता से हल कीजिए ।

Maximise  $Z = x + 2y$

subject to the constraints

$$x + 2y \geq 100$$

$$2x - y \leq 0$$

$$2x + y \leq 200$$

$$x, y \geq 0$$

Solve the above LPP graphically.

खण्ड द

SECTION D

प्रश्न संख्या 24 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Question numbers 24 to 29 carry 6 marks each.

24. गुणनफल  $\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  ज्ञात कीजिए तथा इसका प्रयोग

समीकरण निकाय  $x - y + z = 4$ ,  $x - 2y - 2z = 9$ ,  $2x + y + 3z = 1$  को हल करने में कीजिए ।

Determine the product  $\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  and use it to

solve the system of equations  $x - y + z = 4$ ,  $x - 2y - 2z = 9$ ,  $2x + y + 3z = 1$ .

25.  $f : \mathbb{R} - \left\{ -\frac{4}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{3} \right\}$ , जो  $f(x) = \frac{4x+3}{3x+4}$  द्वारा प्रदत्त है, पर विचार कीजिए ।

दर्शाइए कि  $f$  एकैकी तथा आच्छादक है ।  $f$  का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए । अतः  $f^{-1}(0)$  ज्ञात कीजिए तथा  $x$  ज्ञात कीजिए ताकि  $f^{-1}(x) = 2$ .

अथवा

माना  $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  तथा  $*$   $A$  पर एक द्विआधारी संक्रिया है जो  $(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad)$  द्वारा परिभाषित है, सभी  $(a, b), (c, d) \in A$  के लिए । ज्ञात कीजिए कि क्या  $*$  क्रमविनिमेय तथा सहचारी है । तब,  $A$  पर  $*$  के सापेक्ष

- (i)  $A$  में तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए ।
- (ii)  $A$  के व्युत्क्रमणीय अवयव ज्ञात कीजिए ।

Consider  $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$  given by  $f(x) = \frac{4x+3}{3x+4}$ . Show that  $f$  is

bijjective. Find the inverse of  $f$  and hence find  $f^{-1}(0)$  and  $x$  such that  $f^{-1}(x) = 2$ .

**OR**

Let  $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  and let  $*$  be a binary operation on  $A$  defined by  $(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad)$  for  $(a, b), (c, d) \in A$ . Determine, whether  $*$  is commutative and associative. Then, with respect to  $*$  on  $A$

(i) Find the identity element in  $A$ .

(ii) Find the invertible elements of  $A$ .

**26.** दर्शाइए कि एक बंद घनाभ, जिसका आधार वर्गाकार है तथा आयतन दिया गया है, का पृष्ठीय क्षेत्रफल न्यूनतम होगा, जब यह एक घन है।

Show that the surface area of a closed cuboid with square base and given volume is minimum, when it is a cube.

**27.** समाकलन विधि के प्रयोग से उस त्रिभुज  $ABC$  का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक  $A(4, 1)$ ,  $B(6, 6)$  तथा  $C(8, 4)$  हैं।

**अथवा**

सरल रेखा  $3x - 2y + 12 = 0$  तथा परवलय  $4y = 3x^2$  के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Using the method of integration, find the area of the triangle  $ABC$ , coordinates of whose vertices are  $A(4, 1)$ ,  $B(6, 6)$  and  $C(8, 4)$ .

**OR**

Find the area enclosed between the parabola  $4y = 3x^2$  and the straight line  $3x - 2y + 12 = 0$ .

**28.** अवकल समीकरण  $(x - y) \frac{dy}{dx} = (x + 2y)$  का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया गया है कि  $y = 0$  जब  $x = 1$  है।

Find the particular solution of the differential equation  $(x - y) \frac{dy}{dx} = (x + 2y)$ , given that  $y = 0$  when  $x = 1$ .

29. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिंदुओं  $(3, -4, -5)$  तथा  $(2, -3, 1)$  से होकर जाती रेखा, बिंदुओं  $(1, 2, 3)$ ,  $(4, 2, -3)$  तथा  $(0, 4, 3)$  द्वारा बने समतल को काटती है।

अथवा

एक चर समतल, जो मूल-बिंदु से  $3p$  की अचर दूरी पर स्थित है, निर्देशांक अक्षों को A, B, C पर काटता है। दर्शाइए कि त्रिभुज ABC के केन्द्रक का बिंदुपथ

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2} \text{ है।}$$

Find the coordinates of the point where the line through the points  $(3, -4, -5)$  and  $(2, -3, 1)$ , crosses the plane determined by the points  $(1, 2, 3)$ ,  $(4, 2, -3)$  and  $(0, 4, 3)$ .

OR

A variable plane which remains at a constant distance  $3p$  from the origin cuts the coordinate axes at A, B, C. Show that the locus of the centroid of triangle ABC is  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2}$ .

रोल नं. 

|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|

  
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ 12 हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में 29 प्रश्न हैं ।
- कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains 12 printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains 29 questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

## गणित

### MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे

Time allowed : 3 hours

65/2

अधिकतम अंक : 100

Maximum Marks : 100

## सामान्य निर्देश :

- (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
- (ii) इस प्रश्न पत्र में 29 प्रश्न हैं जो चार खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब, स तथा द । खण्ड अ में 4 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक एक अंक का है । खण्ड ब में 8 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक दो अंक का है । खण्ड स में 11 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक चार अंक का है । खण्ड द में 6 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक छः अंक का है ।
- (iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकतानुसार दिए जा सकते हैं ।
- (iv) पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले 3 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 3 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।
- (v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है । यदि आवश्यक हो, तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं ।

## General Instructions :

- (i) *All questions are compulsory.*
- (ii) *The question paper consists of 29 questions divided into four sections A, B, C and D. Section A comprises of 4 questions of **one mark** each, Section B comprises of 8 questions of **two marks** each, Section C comprises of 11 questions of **four marks** each and Section D comprises of 6 questions of **six marks** each.*
- (iii) *All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*
- (iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 3 questions of four marks each and 3 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.*
- (v) *Use of calculators is **not** permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.*

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 4 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

Question numbers 1 to 4 carry 1 mark each.

1. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} dx$$

Find :

$$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} dx$$

2. समतलों  $2x - y + 2z = 5$  तथा  $5x - 2 \cdot 5y + 5z = 20$  के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

Find the distance between the planes  $2x - y + 2z = 5$  and  $5x - 2 \cdot 5y + 5z = 20$ .

3. यदि किसी  $2 \times 2$  वर्ग आव्यूह A के लिए,  $A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$  है, तो  $|A|$  का मान लिखिए ।

If for any  $2 \times 2$  square matrix A,  $A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ , then write the value of  $|A|$ .

4. 'k' का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निम्नलिखित फलन  $x = 3$  पर संतत है :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+3)^2 - 36}{x-3} & , x \neq 3 \\ k & , x = 3 \end{cases}$$

Determine the value of 'k' for which the following function is continuous at  $x = 3$  :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+3)^2 - 36}{x-3} & , x \neq 3 \\ k & , x = 3 \end{cases}$$

### खण्ड ब

### SECTION B

प्रश्न संख्या 5 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न के 2 अंक हैं ।

Question numbers 5 to 12 carry 2 marks each.

5. एक पासा, जिसके फलकों पर अंक 1, 2, 3 लाल रंग में लिखे हैं तथा 4, 5, 6 हरे रंग में लिखे हैं, को उछाला गया । माना घटना A है : “प्राप्त संख्या सम है” तथा घटना B है : “प्राप्त संख्या लाल है” । ज्ञात कीजिए कि क्या A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं ।

A die, whose faces are marked 1, 2, 3 in red and 4, 5, 6 in green, is tossed. Let A be the event “number obtained is even” and B be the event “number obtained is red”. Find if A and B are independent events.

6. दो दर्जी, A तथा B, प्रतिदिन क्रमशः ₹ 300 तथा ₹ 400 कमाते हैं । A एक दिन में 6 कमीजें तथा 4 पैटें सिल सकता है जबकि B प्रतिदिन 10 कमीजें तथा 4 पैटें सिल सकता है । यह ज्ञात करने के लिए कि कम-से-कम 60 कमीजें तथा 32 पैटें सिलने के लिए प्रत्येक कितने दिन कार्य करे कि श्रम लागत कम-से-कम हो, रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए ।

Two tailors, A and B, earn ₹ 300 and ₹ 400 per day respectively. A can stitch 6 shirts and 4 pairs of trousers while B can stitch 10 shirts and 4 pairs of trousers per day. To find how many days should each of them work and if it is desired to produce at least 60 shirts and 32 pairs of trousers at a minimum labour cost, formulate this as an LPP.



7. बिंदुओं P(2, 2, 1) तथा Q(5, 1, -2) को मिलाने वाली रेखा पर स्थित एक बिंदु का x-निर्देशांक 4 है। उसका z-निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

The x-coordinate of a point on the line joining the points P(2, 2, 1) and Q(5, 1, -2) is 4. Find its z-coordinate.

8. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{dx}{5 - 8x - x^2}$$

Find :

$$\int \frac{dx}{5 - 8x - x^2}$$

9. यदि A कोटि 3 का एक विषम-सममित आव्यूह है, तो सिद्ध कीजिए कि  $\det A = 0$ .

If A is a skew-symmetric matrix of order 3, then prove that  $\det A = 0$ .

10. फलन  $f(x) = x^3 - 3x$ ,  $[-\sqrt{3}, 0]$  के लिए रोले के प्रमेय के प्रयोग से c का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of c in Rolle's theorem for the function  $f(x) = x^3 - 3x$  in  $[-\sqrt{3}, 0]$ .

11. दर्शाइए कि फलन  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 100$ ,  $\mathbb{R}$  पर वर्धमान है।

Show that the function  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 100$  is increasing on  $\mathbb{R}$ .

12. एक आयत की लंबाई x, 5 सेमी/मिनट की दर से घट रही है और चौड़ाई y, 4 सेमी/मिनट की दर से बढ़ रही है। जब  $x = 8$  सेमी और  $y = 6$  सेमी है, तो आयत के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

The length x, of a rectangle is decreasing at the rate of 5 cm/minute and the width y, is increasing at the rate of 4 cm/minute. When  $x = 8$  cm and  $y = 6$  cm, find the rate of change of the area of the rectangle.

**खण्ड स**  
**SECTION C**

प्रश्न संख्या 13 से 23 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।  
Question numbers 13 to 23 carry 4 marks each.

13. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_1^4 \{ |x-1| + |x-2| + |x-4| \} dx$$

Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

**OR**

Evaluate :

$$\int_1^4 \{ |x-1| + |x-2| + |x-4| \} dx$$

14. दर्शाइए कि बिंदु A, B, C जिनके स्थिति सदिश क्रमशः  $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ,  $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$  तथा  $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$  हैं, एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं । अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Show that the points A, B, C with position vectors  $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ,  $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$  and  $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$  respectively, are the vertices of a right-angled triangle. Hence find the area of the triangle.

15. 4 कार्ड हैं जिन पर संख्याएँ 1, 3, 5 तथा 7 अंकित हैं, एक कार्ड पर एक संख्या । दो कार्ड प्रतिस्थापना किए बिना यादृच्छया निकाले गए । माना X निकाले गए दो कार्डों पर लिखी संख्याओं का योगफल है । X का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए ।

There are 4 cards numbered 1, 3, 5 and 7, one number on one card. Two cards are drawn at random without replacement. Let X denote the sum of the numbers on the two drawn cards. Find the mean and variance of X.

16. एक विद्यालय के विद्यार्थियों के लिए ज्ञात है कि 30% विद्यार्थियों की 100% उपस्थिति है तथा 70% विद्यार्थी अनियमित हैं । पिछले वर्ष के परिणाम सूचित करते हैं कि उन सभी विद्यार्थियों, जिनकी उपस्थिति 100% है, में से 70% ने वार्षिक परीक्षा में A ग्रेड पाया तथा अनियमित विद्यार्थियों में से 10% ने A ग्रेड पाया । वर्ष के अंत में, विद्यालय में से एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना गया तथा यह पाया गया कि उसका A ग्रेड था । प्रायिकता क्या है कि उस विद्यार्थी की 100% उपस्थिति है ? क्या नियमितता केवल विद्यालय में आवश्यक है ? अपने उत्तर के पक्ष में तर्क दीजिए ।

Of the students in a school, it is known that 30% have 100% attendance and 70% students are irregular. Previous year results report that 70% of all students who have 100% attendance attain A grade and 10% irregular students attain A grade in their annual examination. At the end of the year, one student is chosen at random from the school and he was found to have an A grade. What is the probability that the student has 100% attendance ? Is regularity required only in school ? Justify your answer.

17. यदि  $\tan^{-1} \frac{x-3}{x-4} + \tan^{-1} \frac{x+3}{x+4} = \frac{\pi}{4}$  है, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

If  $\tan^{-1} \frac{x-3}{x-4} + \tan^{-1} \frac{x+3}{x+4} = \frac{\pi}{4}$ , then find the value of x.

18. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर, सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a^2 + 2a & 2a + 1 & 1 \\ 2a + 1 & a + 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a - 1)^3$$

अथवा

आव्यूह A ज्ञात कीजिए कि

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$$

Using properties of determinants, prove that

$$\begin{vmatrix} a^2 + 2a & 2a + 1 & 1 \\ 2a + 1 & a + 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a - 1)^3$$

**OR**

Find matrix A such that

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$$

19. यदि  $x^y + y^x = a^b$  है, तो  $\frac{dy}{dx}$  ज्ञात कीजिए ।

**अथवा**

यदि  $e^y(x + 1) = 1$  है, तो दर्शाइए कि  $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ .

If  $x^y + y^x = a^b$ , then find  $\frac{dy}{dx}$ .

**OR**

If  $e^y(x + 1) = 1$ , then show that  $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ .

20. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\sin \theta d\theta}{(4 + \cos^2 \theta)(2 - \sin^2 \theta)}$$

Find :

$$\int \frac{\sin \theta d\theta}{(4 + \cos^2 \theta)(2 - \sin^2 \theta)}$$

21. निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या का आलेख द्वारा हल ज्ञात कीजिए :

$Z = 34x + 45y$  का अधिकतमीकरण कीजिए

निम्नलिखित अवरोधों के अंतर्गत

$$x + y \leq 300$$

$$2x + 3y \leq 70$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Solve the following linear programming problem graphically :

Maximise  $Z = 34x + 45y$

under the following constraints

$$x + y \leq 300$$

$$2x + 3y \leq 70$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

22.  $x$  का वह मान ज्ञात कीजिए ताकि बिंदु A (3, 2, 1), B (4, x, 5), C (4, 2, -2) तथा D (6, 5, -1) समतलीय हों ।

Find the value of  $x$  such that the points A (3, 2, 1), B (4, x, 5), C (4, 2, -2) and D (6, 5, -1) are coplanar.

23. अवकल समीकरण  $y dx - (x + 2y^2) dy = 0$  का व्यापक हल ज्ञात कीजिए ।

Find the general solution of the differential equation

$$y dx - (x + 2y^2) dy = 0.$$

**खण्ड द**  
**SECTION D**

प्रश्न संख्या 24 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Question numbers 24 to 29 carry 6 marks each.

24. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिंदुओं (3, - 4, - 5) तथा (2, - 3, 1) से होकर जाती रेखा, बिंदुओं (1, 2, 3), (4, 2, - 3) तथा (0, 4, 3) द्वारा बने समतल को काटती है ।

**अथवा**

एक चर समतल, जो मूल-बिंदु से  $3p$  की अचर दूरी पर स्थित है, निर्देशांक अक्षों को A, B, C पर काटता है । दर्शाइए कि त्रिभुज ABC के केन्द्रक का बिंदुपथ

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2} \text{ है ।}$$

Find the coordinates of the point where the line through the points (3, - 4, - 5) and (2, - 3, 1), crosses the plane determined by the points (1, 2, 3), (4, 2, - 3) and (0, 4, 3).

**OR**

A variable plane which remains at a constant distance  $3p$  from the origin cuts the coordinate axes at A, B, C. Show that the locus of the centroid of triangle ABC is  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2}$ .

25. अवकल समीकरण  $(x - y) \frac{dy}{dx} = (x + 2y)$  का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया गया है कि  $y = 0$  जब  $x = 1$  है ।

Find the particular solution of the differential equation  $(x - y) \frac{dy}{dx} = (x + 2y)$ , given that  $y = 0$  when  $x = 1$ .

26. समाकलन विधि के प्रयोग से उस त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक A (4, 1), B (6, 6) तथा C (8, 4) हैं ।

**अथवा**

सरल रेखा  $3x - 2y + 12 = 0$  तथा परवलय  $4y = 3x^2$  के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Using the method of integration, find the area of the triangle ABC, coordinates of whose vertices are A (4, 1), B (6, 6) and C (8, 4).

**OR**

Find the area enclosed between the parabola  $4y = 3x^2$  and the straight line  $3x - 2y + 12 = 0$ .

27.  $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$ , जो  $f(x) = \frac{4x+3}{3x+4}$  द्वारा प्रदत्त है, पर विचार कीजिए । दर्शाइए कि  $f$  एकैकी तथा आच्छादक है ।  $f$  का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए । अतः  $f^{-1}(0)$  ज्ञात कीजिए तथा  $x$  ज्ञात कीजिए ताकि  $f^{-1}(x) = 2$ .

**अथवा**

माना  $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  तथा  $*$   $A$  पर एक द्विआधारी संक्रिया है जो  $(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad)$  द्वारा परिभाषित है, सभी  $(a, b), (c, d) \in A$  के लिए । ज्ञात कीजिए कि क्या  $*$  क्रमविनिमेय तथा सहचारी है । तब,  $A$  पर  $*$  के सापेक्ष

- (i)  $A$  में तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए ।  
(ii)  $A$  के व्युत्क्रमणीय अवयव ज्ञात कीजिए ।

Consider  $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$  given by  $f(x) = \frac{4x+3}{3x+4}$ . Show that  $f$  is bijective. Find the inverse of  $f$  and hence find  $f^{-1}(0)$  and  $x$  such that  $f^{-1}(x) = 2$ .

**OR**

Let  $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  and let  $*$  be a binary operation on  $A$  defined by  $(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad)$  for  $(a, b), (c, d) \in A$ . Determine, whether  $*$  is commutative and associative. Then, with respect to  $*$  on  $A$

- (i) Find the identity element in  $A$ .  
(ii) Find the invertible elements of  $A$ .

28. AB एक वृत्त का व्यास है तथा वृत्त पर कोई बिंदु C स्थित है। दर्शाइए कि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल अधिकतम होगा, जब यह एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

AB is the diameter of a circle and C is any point on the circle. Show that the area of triangle ABC is maximum, when it is an isosceles triangle.

29. यदि  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  है, तो  $A^{-1}$  ज्ञात कीजिए। अतः  $A^{-1}$  के प्रयोग से समीकरण

निकाय  $2x - 3y + 5z = 11$ ,  $3x + 2y - 4z = -5$ ,  $x + y - 2z = -3$  का हल ज्ञात कीजिए।

If  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ , find  $A^{-1}$ . Hence using  $A^{-1}$  solve the system of

equations  $2x - 3y + 5z = 11$ ,  $3x + 2y - 4z = -5$ ,  $x + y - 2z = -3$ .



रोल नं. 

|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|

  
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ 12 हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में 29 प्रश्न हैं ।
- कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains 12 printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains 29 questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

## गणित

### MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे

Time allowed : 3 hours

65/3

अधिकतम अंक : 100

Maximum Marks : 100

## सामान्य निर्देश :

- (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
- (ii) इस प्रश्न पत्र में 29 प्रश्न हैं जो चार खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब, स तथा द । खण्ड अ में 4 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक एक अंक का है । खण्ड ब में 8 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक दो अंक का है । खण्ड स में 11 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक चार अंक का है । खण्ड द में 6 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक छः अंक का है ।
- (iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकतानुसार दिए जा सकते हैं ।
- (iv) पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले 3 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 3 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।
- (v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है । यदि आवश्यक हो, तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं ।

## General Instructions :

- (i) *All questions are compulsory.*
- (ii) *The question paper consists of 29 questions divided into four sections A, B, C and D. Section A comprises of 4 questions of **one mark** each, Section B comprises of 8 questions of **two marks** each, Section C comprises of 11 questions of **four marks** each and Section D comprises of 6 questions of **six marks** each.*
- (iii) *All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*
- (iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 3 questions of four marks each and 3 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.*
- (v) *Use of calculators is **not** permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.*

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 4 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

Question numbers 1 to 4 carry 1 mark each.

1. 'k' का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निम्नलिखित फलन  $x = 3$  पर संतत है :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+3)^2 - 36}{x-3} & , x \neq 3 \\ k & , x = 3 \end{cases}$$

Determine the value of 'k' for which the following function is continuous at  $x = 3$  :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+3)^2 - 36}{x-3} & , x \neq 3 \\ k & , x = 3 \end{cases}$$

2. यदि किसी  $2 \times 2$  वर्ग आव्यूह A के लिए,  $A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$  है, तो  $|A|$  का मान लिखिए ।

If for any  $2 \times 2$  square matrix A,  $A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ , then write the value of  $|A|$ .

3. समतलों  $2x - y + 2z = 5$  तथा  $5x - 2.5y + 5z = 20$  के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।  
Find the distance between the planes  $2x - y + 2z = 5$  and  $5x - 2.5y + 5z = 20$ .

4. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} dx$$

Find :

$$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} dx$$

खण्ड ब

### SECTION B

प्रश्न संख्या 5 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न के 2 अंक हैं ।

Question numbers 5 to 12 carry 2 marks each.

5. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{dx}{5 - 8x - x^2}$$

Find :

$$\int \frac{dx}{5 - 8x - x^2}$$

6. दो दर्जी, A तथा B, प्रतिदिन क्रमशः ₹ 300 तथा ₹ 400 कमाते हैं । A एक दिन में 6 कमीजें तथा 4 पैंटें सिल सकता है जबकि B प्रतिदिन 10 कमीजें तथा 4 पैंटें सिल सकता है । यह ज्ञात करने के लिए कि कम-से-कम 60 कमीजें तथा 32 पैंटें सिलने के लिए प्रत्येक कितने दिन कार्य करे कि श्रम लागत कम-से-कम हो, रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए ।

Two tailors, A and B, earn ₹ 300 and ₹ 400 per day respectively. A can stitch 6 shirts and 4 pairs of trousers while B can stitch 10 shirts and 4 pairs of trousers per day. To find how many days should each of them work and if it is desired to produce at least 60 shirts and 32 pairs of trousers at a minimum labour cost, formulate this as an LPP.

7. एक पासा, जिसके फलकों पर अंक 1, 2, 3 लाल रंग में लिखे हैं तथा 4, 5, 6 हरे रंग में लिखे हैं, को उछाला गया। माना घटना A है : “प्राप्त संख्या सम है” तथा घटना B है : “प्राप्त संख्या लाल है”। ज्ञात कीजिए कि क्या A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

A die, whose faces are marked 1, 2, 3 in red and 4, 5, 6 in green, is tossed. Let A be the event “number obtained is even” and B be the event “number obtained is red”. Find if A and B are independent events.

8. बिंदुओं P(2, 2, 1) तथा Q(5, 1, -2) को मिलाने वाली रेखा पर स्थित एक बिंदु का x-निर्देशांक 4 है। उसका z-निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

The x-coordinate of a point on the line joining the points P(2, 2, 1) and Q(5, 1, -2) is 4. Find its z-coordinate.

9. दर्शाइए कि फलन  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 100$ ,  $\mathbb{R}$  पर वर्धमान है।

Show that the function  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 100$  is increasing on  $\mathbb{R}$ .

10. फलन  $f(x) = x^3 - 3x$ ,  $[-\sqrt{3}, 0]$  के लिए रोले के प्रमेय के प्रयोग से c का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of c in Rolle's theorem for the function  $f(x) = x^3 - 3x$  in  $[-\sqrt{3}, 0]$ .

11. यदि A कोटि 3 का एक विषम-सममित आव्यूह है, तो सिद्ध कीजिए कि  $\det A = 0$ .

If A is a skew-symmetric matrix of order 3, then prove that  $\det A = 0$ .

12. एक गोले का आयतन 8 घन सेमी/से. की दर से बढ़ रहा है। इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के बढ़ने की दर ज्ञात कीजिए जबकि गोले की त्रिज्या 12 सेमी है।

The volume of a sphere is increasing at the rate of  $8 \text{ cm}^3/\text{s}$ . Find the rate at which its surface area is increasing when the radius of the sphere is 12 cm.

**खण्ड स**  
**SECTION C**

प्रश्न संख्या 13 से 23 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।

Question numbers 13 to 23 carry 4 marks each.

13. 4 कार्ड हैं जिन पर संख्याएँ 1, 3, 5 तथा 7 अंकित हैं, एक कार्ड पर एक संख्या । दो कार्ड प्रतिस्थापना किए बिना यादृच्छया निकाले गए । माना X निकाले गए दो कार्डों पर लिखी संख्याओं का योगफल है । X का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए ।

There are 4 cards numbered 1, 3, 5 and 7, one number on one card. Two cards are drawn at random without replacement. Let X denote the sum of the numbers on the two drawn cards. Find the mean and variance of X.

14. दर्शाइए कि बिंदु A, B, C जिनके स्थिति सदिश क्रमशः  $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ,  $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$  तथा  $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$  हैं, एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं । अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Show that the points A, B, C with position vectors  $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ,  $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$  and  $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$  respectively, are the vertices of a right-angled triangle. Hence find the area of the triangle.

15. एक विद्यालय के विद्यार्थियों के लिए ज्ञात है कि 30% विद्यार्थियों की 100% उपस्थिति है तथा 70% विद्यार्थी अनियमित हैं । पिछले वर्ष के परिणाम सूचित करते हैं कि उन सभी विद्यार्थियों, जिनकी उपस्थिति 100% है, में से 70% ने वार्षिक परीक्षा में A ग्रेड पाया तथा अनियमित विद्यार्थियों में से 10% ने A ग्रेड पाया । वर्ष के अंत में, विद्यालय में से एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना गया तथा यह पाया गया कि उसका A ग्रेड था । प्रायिकता क्या है कि उस विद्यार्थी की 100% उपस्थिति है ? क्या नियमितता केवल विद्यालय में आवश्यक है ? अपने उत्तर के पक्ष में तर्क दीजिए ।

Of the students in a school, it is known that 30% have 100% attendance and 70% students are irregular. Previous year results report that 70% of all students who have 100% attendance attain A grade and 10% irregular students attain A grade in their annual examination. At the end of the year, one student is chosen at random from the school and he was found to have an A grade. What is the probability that the student has 100% attendance ? Is regularity required only in school ? Justify your answer.

16. यदि  $\tan^{-1} \frac{x-3}{x-4} + \tan^{-1} \frac{x+3}{x+4} = \frac{\pi}{4}$  है, तो  $x$  का मान ज्ञात कीजिए ।

If  $\tan^{-1} \frac{x-3}{x-4} + \tan^{-1} \frac{x+3}{x+4} = \frac{\pi}{4}$ , then find the value of  $x$ .

17. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर, सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a^2 + 2a & 2a + 1 & 1 \\ 2a + 1 & a + 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a - 1)^3$$

अथवा

आव्यूह A ज्ञात कीजिए कि

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$$

Using properties of determinants, prove that

$$\begin{vmatrix} a^2 + 2a & 2a + 1 & 1 \\ 2a + 1 & a + 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a - 1)^3$$

OR

Find matrix A such that

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$$

18. यदि  $x^y + y^x = a^b$  है, तो  $\frac{dy}{dx}$  ज्ञात कीजिए ।

अथवा

यदि  $e^y(x+1) = 1$  है, तो दर्शाइए कि  $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ .

If  $x^y + y^x = a^b$ , then find  $\frac{dy}{dx}$ .

OR

If  $e^y(x+1) = 1$ , then show that  $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ .

19. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_1^4 \{ |x-1| + |x-2| + |x-4| \} dx$$

Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

OR

Evaluate :

$$\int_1^4 \{ |x-1| + |x-2| + |x-4| \} dx$$



20. निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या का आलेख द्वारा हल ज्ञात कीजिए :

$Z = 7x + 10y$  का अधिकतमीकरण कीजिए

निम्नलिखित अवरोधों के अंतर्गत

$$4x + 6y \leq 240$$

$$6x + 3y \leq 240$$

$$x \geq 10$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Solve the following linear programming problem graphically :

Maximise  $Z = 7x + 10y$

subject to the constraints

$$4x + 6y \leq 240$$

$$6x + 3y \leq 240$$

$$x \geq 10$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

21. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{e^x dx}{(e^x - 1)^2 (e^x + 2)}$$

Find :

$$\int \frac{e^x dx}{(e^x - 1)^2 (e^x + 2)}$$

22. यदि  $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$  तथा  $\vec{b} = 7\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$  हैं, तो  $\vec{b}$  को  $\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$  के रूप में अभिव्यक्त कीजिए, जहाँ  $\vec{b}_1$ ,  $\vec{a}$  के समांतर है और  $\vec{b}_2$ ,  $\vec{a}$  के लंबवत् है।

If  $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$  and  $\vec{b} = 7\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ , then express  $\vec{b}$  in the form of  $\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$ , where  $\vec{b}_1$  is parallel to  $\vec{a}$  and  $\vec{b}_2$  is perpendicular to  $\vec{a}$ .

23. अवकल समीकरण  $\frac{dy}{dx} - y = \sin x$  का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Find the general solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} - y = \sin x.$$

खण्ड द

SECTION D

प्रश्न संख्या 24 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Question numbers 24 to 29 carry 6 marks each.

24. समाकलन विधि के प्रयोग से उस त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक A (4, 1), B (6, 6) तथा C (8, 4) हैं ।

अथवा

सरल रेखा  $3x - 2y + 12 = 0$  तथा परवलय  $4y = 3x^2$  के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Using the method of integration, find the area of the triangle ABC, coordinates of whose vertices are A (4, 1), B (6, 6) and C (8, 4).

OR

Find the area enclosed between the parabola  $4y = 3x^2$  and the straight line  $3x - 2y + 12 = 0$ .

25. अवकल समीकरण  $(x - y) \frac{dy}{dx} = (x + 2y)$  का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया गया है कि  $y = 0$  जब  $x = 1$  है ।

Find the particular solution of the differential equation  $(x - y) \frac{dy}{dx} = (x + 2y)$ , given that  $y = 0$  when  $x = 1$ .

26. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिंदुओं (3, -4, -5) तथा (2, -3, 1) से होकर जाती रेखा, बिंदुओं (1, 2, 3), (4, 2, -3) तथा (0, 4, 3) द्वारा बने समतल को काटती है ।

अथवा

एक चर समतल, जो मूल-बिंदु से  $3p$  की अचर दूरी पर स्थित है, निर्देशांक अक्षों को A, B, C पर काटता है । दर्शाइए कि त्रिभुज ABC के केन्द्रक का बिंदुपथ

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2} \text{ है ।}$$

Find the coordinates of the point where the line through the points  $(3, -4, -5)$  and  $(2, -3, 1)$ , crosses the plane determined by the points  $(1, 2, 3)$ ,  $(4, 2, -3)$  and  $(0, 4, 3)$ .

**OR**

A variable plane which remains at a constant distance  $3p$  from the origin cuts the coordinate axes at A, B, C. Show that the locus of the centroid of triangle ABC is  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2}$ .

27.  $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$ , जो  $f(x) = \frac{4x+3}{3x+4}$  द्वारा प्रदत्त है, पर विचार कीजिए। दर्शाइए कि  $f$  एकैकी तथा आच्छादक है।  $f$  का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए। अतः  $f^{-1}(0)$  ज्ञात कीजिए तथा  $x$  ज्ञात कीजिए ताकि  $f^{-1}(x) = 2$ .

**अथवा**

माना  $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  तथा  $*$   $A$  पर एक द्विआधारी संक्रिया है जो  $(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad)$  द्वारा परिभाषित है, सभी  $(a, b), (c, d) \in A$  के लिए। ज्ञात कीजिए कि क्या  $*$  क्रमविनिमेय तथा सहचारी है। तब,  $A$  पर  $*$  के सापेक्ष

- $A$  में तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए।
- $A$  के व्युत्क्रमणीय अवयव ज्ञात कीजिए।

Consider  $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$  given by  $f(x) = \frac{4x+3}{3x+4}$ . Show that  $f$  is bijective. Find the inverse of  $f$  and hence find  $f^{-1}(0)$  and  $x$  such that  $f^{-1}(x) = 2$ .

**OR**

Let  $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  and let  $*$  be a binary operation on  $A$  defined by  $(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad)$  for  $(a, b), (c, d) \in A$ . Determine, whether  $*$  is commutative and associative. Then, with respect to  $*$  on  $A$

- Find the identity element in  $A$ .
- Find the invertible elements of  $A$ .

28. यदि  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  है, तो  $A^{-1}$  ज्ञात कीजिए, अतः रैखिक समीकरण निकाय

$2x - 3y + 5z = 11$ ,  $3x + 2y - 4z = -5$  तथा  $x + y - 2z = -3$  को हल कीजिए ।

If  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ , then find  $A^{-1}$  and hence solve the system of linear

equations  $2x - 3y + 5z = 11$ ,  $3x + 2y - 4z = -5$  and  $x + y - 2z = -3$ .

29. किसी आयत के ऊपर बने अर्धवृत्त के आकार वाली एक खिड़की है । खिड़की का संपूर्ण परिमाण 10 मी. है । पूर्णतया खुली खिड़की से अधिकतम प्रकाश आने के लिए, खिड़की की विमाएँ ज्ञात कीजिए ।

A window is in the form of a rectangle surmounted by a semicircular opening. The total perimeter of the window is 10 m. Find the dimensions of the window to admit maximum light through the whole opening.

**Senior School Certificate Examination**

**March 2017**

**Marking Scheme — Mathematics 65/1, 65/2, 65/3  
[Outside Delhi]**

***General Instructions:***

1. The Marking Scheme provides general guidelines to reduce subjectivity in the marking. The answers given in the Marking Scheme are suggested answers. The content is thus indicative. If a student has given any other answer which is different from the one given in the Marking Scheme, but conveys the meaning, such answers should be given full weightage.
2. Evaluation is to be done as per instructions provided in the marking scheme. It should not be done according to one's own interpretation or any other consideration — Marking Scheme should be strictly adhered to and religiously followed.
3. Alternative methods are accepted. Proportional marks are to be awarded.
4. In question (s) on differential equations, constant of integration has to be written.
5. If a candidate has attempted an extra question, marks obtained in the question attempted first should be retained and the other answer should be scored out.
6. A full scale of marks - 0 to 100 has to be used. Please do not hesitate to award full marks if the answer deserves it.
7. Separate Marking Scheme for all the three sets has been given.
8. As per orders of the Hon'ble Supreme Court. The candidates would now be permitted to obtain photocopy of the Answer book on request on payment of the prescribed fee. All examiners/ Head Examiners are once again reminded that they must ensure that evaluation is carried out strictly as per value points for each answer as given in the Marking Scheme.

QUESTION PAPER CODE 65/1  
EXPECTED ANSWER/VALUE POINTS

**SECTION A**

1.  $|A| = 8.$  1
2.  $k = 12.$  1
3.  $-\log |\sin 2x| + c$  OR  $\log |\sec x| - \log |\sin x| + c.$  1
4. Writing the equations as  $\left. \begin{array}{l} 2x - y + 2z = 5 \\ 2x - y + 2z = 8 \end{array} \right\}$   $\frac{1}{2}$
- $\Rightarrow$  Distance = 1 unit  $\frac{1}{2}$

**SECTION B**

5. Any skew symmetric matrix of order 3 is  $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$  1
- $\Rightarrow |A| = -a(bc) + a(bc) = 0$  1

**OR**

Since A is a skew-symmetric matrix  $\therefore A^T = -A$   $\frac{1}{2}$

$\therefore |A^T| = |-A| = (-1)^3 \cdot |A|$   $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow |A| = -|A|$   $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2|A| = 0$  or  $|A| = 0.$   $\frac{1}{2}$

6.  $f(x) = x^3 - 3x$
- $\therefore f'(c) = 3c^2 - 3 = 0$   $\frac{1}{2}$
- $\therefore c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1.$   $\frac{1}{2}$
- Rejecting  $c = 1$  as it does not belong to  $(-\sqrt{3}, 0),$   $\frac{1}{2}$
- we get  $c = -1.$   $\frac{1}{2}$

7. Let  $V$  be the volume of cube, then  $\frac{dV}{dt} = 9 \text{ cm}^3/\text{s}$ .

Surface area ( $S$ ) of cube =  $6x^2$ , where  $x$  is the side.

$$\text{then } V = x^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3x^2} \cdot \frac{dV}{dt} \quad 1$$

$$S = 6x^2 \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 12x \frac{dx}{dt} = 12x \cdot \frac{1}{3x^2} \frac{dV}{dt} \quad \frac{1}{2}$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot 9 = 3.6 \text{ cm}^2/\text{s} \quad \frac{1}{2}$$

8.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 100$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 \quad \frac{1}{2}$$

$$= 3[x^2 - 2x + 2] = 3[(x - 1)^2 + 1] \quad 1$$

$$\text{since } f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \therefore f(x) \text{ is increasing on } \mathbb{R} \quad \frac{1}{2}$$

9. Equation of line PQ is  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-3} \quad \frac{1}{2}$

Any point on the line is  $(3\lambda + 2, -\lambda + 2, -3\lambda + 1) \quad \frac{1}{2}$

$$3\lambda + 2 = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \therefore z \text{ coord.} = -3\left(\frac{2}{3}\right) + 1 = -1. \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

**OR**

$$\begin{array}{ccc} \text{P} & \text{R} & \text{Q} \\ (2, 2, 1) & (4, y, z) & (5, 1, -2) \end{array}$$

Let  $R(4, y, z)$  lying on  $PQ$  divides  $PQ$  in the ratio  $k : 1$

$$\Rightarrow 4 = \frac{5k+2}{k+1} \Rightarrow k = 2. \quad 1$$

$$\therefore z = \frac{2(-2)+1(1)}{2+1} = \frac{-3}{3} = -1. \quad 1$$

10. Event A: Number obtained is even

B: Number obtained is red.

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(\text{getting an even red number}) = \frac{1}{6} \quad \frac{1}{2}$$

$$\text{Since } P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq P(A \cap B) \text{ which is } \frac{1}{6} \quad \frac{1}{2}$$

$\therefore$  A and B are not independent events.

11. Let A works for x day and B for y days.

$$\therefore \text{ L.P.P. is Minimize } C = 300x + 400y \quad \frac{1}{2}$$

$$\text{Subject to: } \begin{cases} 6x + 10y \geq 60 \\ 4x + 4y \geq 32 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \quad 1 \frac{1}{2}$$

$$12. \int \frac{dx}{5 - 8x - x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{21})^2 - (x + 4)^2} \quad 1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{21}} \log \left| \frac{\sqrt{21} + (x + 4)}{\sqrt{21} - (x + 4)} \right| + c \quad 1$$

### SECTION C

$$13. \tan^{-1} \frac{x-3}{x-4} + \tan^{-1} \frac{x+3}{x+4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} \left( \frac{\frac{x-3}{x-4} + \frac{x+3}{x+4}}{1 - \frac{x-3}{x-4} \cdot \frac{x+3}{x+4}} \right) = \frac{\pi}{4} \quad 1 \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 24}{-7} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{17}{2} \quad 1 \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{17}{2}} \quad 1$$



$$14. \Delta = \begin{vmatrix} a^2 + 2a & 2a + 1 & 1 \\ 2a + 1 & a + 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$R_1 \rightarrow R_1 - R_2 \text{ and } R_2 \rightarrow R_2 - R_3$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 - 1 & a - 1 & 0 \\ 2(a - 1) & a - 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad 1+1$$

$$= (a - 1)^2 \begin{vmatrix} a + 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad 1$$

Expanding

$$(a - 1)^2 \cdot (a - 1) = (a - 1)^3. \quad 1$$

**OR**

$$\text{Let } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \\ 9 & 22 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a - c & 2b - d \\ a & b \\ -3a + 4c & -3b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \\ 9 & 22 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\Rightarrow 2a - c = -1, \quad 2b - d = -8$$

$$a = 1, \quad b = -2 \quad 1$$

$$-3a + 4c = 9, \quad -3b + 4d = 22$$

Solving to get  $a = 1, b = -2, c = 3, d = 4$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$15. x^y + y^x = a^b$$

Let  $u + v = a^b$ , where  $x^y = u$  and  $y^x = v$ .

$$\therefore \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0 \quad \dots(i) \quad \frac{1}{2}$$

$$y \log x = \log u \Rightarrow \frac{du}{dx} = x^y \left[ \frac{y}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx} \right] \quad 1$$

$$x \log y = \log v \Rightarrow \frac{dv}{dx} = y^x \left[ \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \log y \right] \quad 1$$

$$\text{Putting in (i) } x^y \left[ \frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx} \right] + y^x \left[ \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \log y \right] = 0 \quad \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^x \log y + y \cdot x^{y-1}}{x^y \cdot \log x + x \cdot y^{x-1}} \quad 1$$

**OR**

$$e^y \cdot (x+1) = 1 \Rightarrow e^y \cdot 1 + (x+1) \cdot e^y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad 1\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x+1)} \quad 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{1}{(x+1)^2} = \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \quad 1\frac{1}{2}$$

$$16. \quad I = \int \frac{\cos \theta}{(4 + \sin^2 \theta)(5 - 4 \cos^2 \theta)} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{(4 + \sin^2 \theta)(1 + 4 \sin^2 \theta)} d\theta \quad \frac{1}{2}$$

$$= \int \frac{dt}{(4+t^2)(1+4t^2)}, \text{ where } \sin \theta = t \quad 1$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{15}}{4+t^2} dt + \int \frac{\frac{4}{15}}{1+4t^2} dt \quad 1$$

$$= -\frac{1}{30} \tan^{-1} \left( \frac{t}{2} \right) + \frac{4}{30} \tan^{-1}(2t) + c \quad 1$$

$$= -\frac{1}{30} \tan^{-1} \left( \frac{\sin \theta}{2} \right) + \frac{2}{15} \tan^{-1}(2 \sin \theta) + c \quad \frac{1}{2}$$

$$17. \quad I = \int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \tan x}{\sec x + \tan x} dx \quad 1$$

$$\Rightarrow 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\tan x}{\sec x + \tan x} dx = \pi \int_0^{\pi} \tan x (\sec x - \tan x) dx$$

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (\sec x \tan x - \sec^2 x + 1) dx \quad 1$$

$$= \frac{\pi}{2} [\sec x - \tan x + x]_0^{\pi} \quad 1$$

$$= \frac{\pi(\pi - 2)}{2} \quad 1$$

**OR**

$$I = \int_1^4 \{|x - 1| + |x - 2| + |x - 4|\} dx$$

$$= \int_1^4 (x - 1) dx - \int_1^2 (x - 2) dx + \int_2^4 (x - 2) dx - \int_1^4 (x - 4) dx \quad 2$$

$$= \left[ \frac{(x - 1)^2}{2} \right]_1^4 - \left[ \frac{(x - 2)^2}{2} \right]_1^2 + \left[ \frac{(x - 2)^2}{2} \right]_2^4 - \left[ \frac{(x - 4)^2}{2} \right]_1^4 \quad 1$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{1}{2} + 2 + \frac{9}{2} = 11\frac{1}{2} \text{ or } \frac{23}{2} \quad 1$$

18. Given differential equation can be written as

$$(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + y = \tan^{-1} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{1}{1 + x^2} y = \frac{\tan^{-1} x}{1 + x^2} \quad 1$$

$$\text{Integrating factor} = e^{\tan^{-1} x}. \quad 1$$

$$\therefore \text{Solution is } y \cdot e^{\tan^{-1} x} = \int \tan^{-1} x \cdot e^{\tan^{-1} x} \frac{1}{1 + x^2} dx \quad 1$$

$$\Rightarrow y \cdot e^{\tan^{-1} x} = e^{\tan^{-1} x} \cdot (\tan^{-1} x - 1) + c \quad 1$$

$$\text{or } y = (\tan^{-1} x - 1) + c \cdot e^{-\tan^{-1} x}$$

$$19. \quad \overline{AB} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}, \overline{BC} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \overline{CA} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k} \quad 1$$

Since  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ , are not parallel vectors, and  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \vec{0} \therefore A, B, C$  form a triangle 1

Also  $\overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0 \therefore A, B, C$  form a right triangle 1

$$\text{Area of } \Delta = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{BC}| = \frac{1}{2} \sqrt{210} \quad 1$$

20. Given points, A, B, C, D are coplanar, if the

vectors  $\overline{AB}, \overline{AC}$  and  $\overline{AD}$  are coplanar, i.e.

$$\overline{AB} = -2\hat{i} - 4\hat{j} - 6\hat{k}, \overline{AC} = -\hat{i} - 3\hat{j} - 8\hat{k}, \overline{AD} = \hat{i} + (\lambda - 9)\hat{k} \quad 1\frac{1}{2}$$

are coplanar

$$\text{i.e., } \begin{vmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & \lambda - 9 \end{vmatrix} = 0 \quad 1$$

$$-2[-3\lambda + 27] + 4[-\lambda + 17] - 6(3) = 0 \quad 1$$

$$\Rightarrow \lambda = 2. \quad 1\frac{1}{2}$$

21. Writing

|   |   |    |    |    |
|---|---|----|----|----|
| + | 1 | 3  | 5  | 7  |
| 1 | × | 4  | 6  | 8  |
| 3 | 4 | ×  | 8  | 10 |
| 5 | 6 | 8  | ×  | 12 |
| 7 | 8 | 10 | 12 | ×  |

$$\therefore \quad X: \quad \quad \quad 4 \quad \quad 6 \quad \quad 8 \quad \quad 10 \quad \quad 12 \quad 1$$

$$P(X): \quad \quad \quad \frac{2}{12} \quad \quad \frac{2}{12} \quad \quad \frac{4}{12} \quad \quad \frac{2}{12} \quad \quad \frac{2}{12}$$

$$= \frac{1}{6} \quad \quad \frac{1}{6} \quad \quad \frac{2}{6} \quad \quad \frac{1}{6} \quad \quad \frac{1}{6} \quad 1$$

$$xP(X): \quad \quad \quad \frac{4}{6} \quad \quad \frac{6}{6} \quad \quad \frac{16}{6} \quad \quad \frac{10}{6} \quad \quad \frac{12}{6}$$

$$x^2P(X): \quad \quad \quad \frac{16}{6} \quad \quad \frac{36}{6} \quad \quad \frac{128}{6} \quad \quad \frac{100}{6} \quad \quad \frac{144}{6}$$

$$\Sigma xP(x) = \frac{48}{6} = 8 \therefore \text{Mean} = 8 \quad 1$$

$$\text{Variance} = \Sigma x^2P(x) - [\Sigma xP(x)]^2 = \frac{424}{6} - 64 = \frac{20}{3} \quad 1$$

22. Let  $E_1$ : Selecting a student with 100% attendance }  
 $E_2$ : Selecting a student who is not regular } \quad 1

A: selected student attains A grade.

$$P(E_1) = \frac{30}{100} \text{ and } P(E_2) = \frac{70}{100} \quad \frac{1}{2}$$

$$P(A/E_1) = \frac{70}{100} \text{ and } P(A/E_2) = \frac{10}{100} \quad \frac{1}{2}$$

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1) \cdot P(A/E_1)}{P(E_1) \cdot P(A/E_1) + P(E_2) \cdot P(A/E_2)}$$

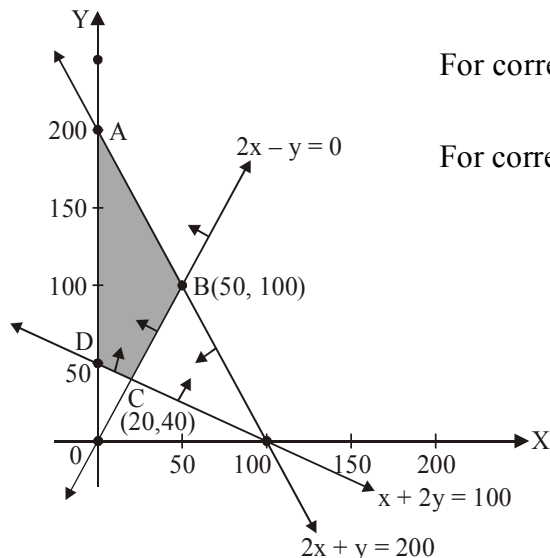
$$= \frac{\frac{30}{100} \times \frac{70}{100}}{\frac{30}{100} \times \frac{70}{100} + \frac{70}{100} \times \frac{10}{100}}$$

$$= \frac{3}{4} \quad 1$$

Regularity is required everywhere or any relevant value \quad 1

23.

$$Z = x + 2y \text{ s.t } x + 2y \geq 100, 2x - y \leq 0, 2x + y \leq 200, x, y \geq 0$$



For correct graph of three lines

For correct shading

$$Z(A) = 0 + 400 = 400$$

$$Z(B) = 50 + 200 = 250$$

$$Z(C) = 20 + 80 = 100$$

$$Z(D) = 0 + 100 = 100$$

$$\therefore \text{Max (= 400) at } x = 0, y = 200 \quad 1$$

## SECTION D

$$24. \text{ Getting } \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \dots(i) \quad 1\frac{1}{2}$$

$$\text{Given equations can be written as } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\Rightarrow AX = B$$

$$\text{From (i) } A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\therefore X = A^{-1}B = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 24 \\ -16 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\Rightarrow x = 3, y = -2, z = -1 \quad \frac{1}{2}$$

$$25. \text{ Let } x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{4}{3} \right\} \text{ and } f(x_1) = f(x_2) \quad \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4x_1 + 3}{3x_1 + 4} = \frac{4x_2 + 3}{3x_2 + 4} \Rightarrow (4x_1 + 3)(3x_2 + 4) = (3x_1 + 4)(4x_2 + 3)$$

$$\Rightarrow 12x_1x_2 + 16x_1 + 9x_2 + 12 = 12x_1x_2 + 16x_2 + 9x_1 + 12$$

$$\Rightarrow 16(x_1 - x_2) - 9(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Hence  $f$  is a 1-1 function 2

$$\text{Let } y = \frac{4x + 3}{3x + 4}, \text{ for } y \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{3} \right\}$$

$$3xy + 4y = 4x + 3 \Rightarrow 4x - 3xy = 4y - 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{4y - 3}{4 - 3y} \quad \therefore \forall y \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{3} \right\}, x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{4}{3} \right\}$$

Hence  $f$  is ONTO and so bijective

2

$$\text{and } f^{-1}(y) = \frac{4y-3}{4-3y}; y \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{3} \right\}$$

1

$$f^{-1}(0) = -\frac{3}{4}$$

 $\frac{1}{2}$ 

$$\text{and } f^{-1}(x) = 2 \Rightarrow \frac{4x-3}{4-3x} = 2$$

$$\Rightarrow 4x - 3 = 8 - 6x$$

$$\Rightarrow 10x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{10}$$

 $\frac{1}{2}$ 

**OR**

$$(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad); (a, b), (c, d) \in A$$

$$(c, d) * (a, b) = (ca, d + bc)$$

Since  $b + ad \neq d + bc \Rightarrow *$  is NOT comutative

 $\frac{1}{2}$ 

for associativity, we have,

$$[(a,b) * (c, d)] * (e, f) = (ac, b + ad) * (e, f) = (ace, b + ad + acf)$$

$$(a, b) * [(c, d) * (e, f)] = (a, b) * (ce, d + cf) = (ace, b + ad + acf)$$

 $\frac{1}{2}$ 

$\Rightarrow *$  is associative

(i) Let  $(e, f)$  be the identity element in  $A$

$$\text{Then } (a, b) * (e, f) = (a, b) = (e, f) * (a, b)$$

$$\Rightarrow (ae, b + af) = (a, b) = (ae, f + be)$$

$$\Rightarrow e = 1, f = 0 \Rightarrow (1, 0) \text{ is the identity element}$$

 $\frac{1}{2}$ 

(ii) Let  $(c, d)$  be the inverse element for  $(a, b)$

$$\Rightarrow (a, b) * (c, d) = (1, 0) = (c, d) * (a, b)$$

$$\Rightarrow (ac, b + ad) = (1, 0) = (ac, d + bc)$$

$$\Rightarrow ac = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{a} \text{ and } b + ad = 0 \Rightarrow d = -\frac{b}{a} \text{ and } d + bc = 0 \Rightarrow d = -bc = -b\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right), a \neq 0 \text{ is the inverse of } (a, b) \in A$$

 $\frac{1}{2}$

26. Let the sides of cuboid be  $x, x, y$

$$\Rightarrow x^2y = k \text{ and } S = 2(x^2 + xy + xy) = 2(x^2 + 2xy)$$

 $\frac{1}{2}+1$ 

$$\therefore S = 2\left[x^2 + 2x \frac{k}{x^2}\right] = 2\left[x^2 + \frac{2k}{x}\right]$$

1

$$\frac{ds}{dx} = 2\left[2x - \frac{2k}{x^2}\right]$$

1

$$\therefore \frac{ds}{dx} = 0 \Rightarrow x^3 = k = x^2y \Rightarrow x = y$$

1

$$\frac{d^2s}{dx^2} = 2\left[2 + \frac{4k}{x^3}\right] > 0 \therefore x = y \text{ will give minimum surface area}$$

1

and  $x = y$ , means sides are equal

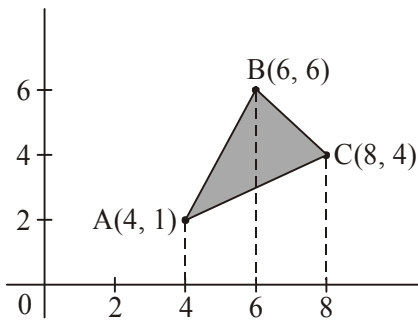
$\therefore$  Cube will have minimum surface area

 $\frac{1}{2}$ 

27.

Figure

1



$$\left. \begin{array}{l} \text{Equation of AB : } y = \frac{5}{2}x - 9 \\ \text{Equation of BC : } y = 12 - x \\ \text{Equation of AC : } y = \frac{3}{4}x - 2 \end{array} \right\}$$

 $\frac{1}{2}$ 

$$\therefore \text{Area (A)} = \int_4^6 \left(\frac{5}{2}x - 9\right) dx + \int_6^8 (12 - x) dx - \int_4^8 \left(\frac{3}{4}x - 2\right) dx$$

1

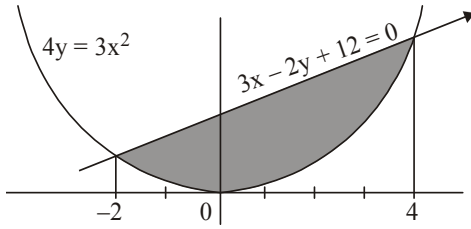
$$= \left[\frac{5}{4}x^2 - 9x\right]_4^6 + \left[12x - \frac{x^2}{2}\right]_6^8 - \left[\frac{3}{8}x^2 - 2x\right]_4^8$$

 $\frac{1}{2}$ 

$$= 7 + 10 - 10 = 7 \text{ sq.units}$$

1





Figure

1

$$4y = 3x^2 \text{ and } 3x - 2y + 12 = 0 \Rightarrow 4\left(\frac{3x+12}{2}\right) = 3x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 24 = 0 \text{ or } x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow \text{x-coordinates of points of intersection are } x = -2, x = 4$$

1

$$\therefore \text{Area (A)} = \int_{-2}^4 \left[ \frac{1}{2}(3x+12) - \frac{3}{4}x^2 \right] dx$$

 $\frac{1}{2}$ 

$$= \left[ \frac{1}{2} \frac{(3x+12)^2}{6} - \frac{3}{4} \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^4$$

 $\frac{1}{2}$ 

$$= 45 - 18 = 27 \text{ sq.units}$$

1

$$28. \frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x-y} = \frac{1+\frac{2y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

 $\frac{1}{2}$ 

$$\frac{y}{x} = v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad \therefore v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v}$$

 $\frac{1}{2}$ 

$$\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = -\frac{1+2v-v+v^2}{v-1} \Rightarrow \int \frac{v-1}{v^2+v+1} dv = -\frac{dx}{x}$$

1

$$\Rightarrow \int \frac{2v+1-3}{v^2+v+1} dv = \int -\frac{2}{x} dx \Rightarrow \int \frac{2v+1}{v^2+v+1} dv - 3 \int \frac{1}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dv = -\int \frac{2}{x} dx$$

1+1

$$\Rightarrow \log |v^2+v+1| - 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left( \frac{2v+1}{\sqrt{3}} \right) = -\log |x|^2 + c$$

1

$$\Rightarrow \log |y^2+xy+x^2| - 2\sqrt{3} \tan^{-1} \left( \frac{2y+x}{\sqrt{3}x} \right) = c$$

 $\frac{1}{2}$ 

$$x = 1, y = 0 \Rightarrow c = -2\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \pi$$

 $\frac{1}{2}$ 

$$\therefore \log |y^2+xy+x^2| - 2\sqrt{3} \tan^{-1} \left( \frac{2y+x}{\sqrt{3}x} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \pi = 0$$

29. Equation of line through  $(3, -4, -5)$  and  $(2, -3, 1)$  is

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{6} \quad \dots(i) \quad 1$$

Eqn. of plane through the three given points is

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)(12) - (y-2)(-6) + (z-3)(6) = 0$$

$$\text{or } 2x + y + z - 7 = 0 \quad \dots(ii) \quad 2$$

Any point on line (i) is  $(-\lambda + 3, \lambda - 4, 6\lambda - 5)$  1

If this point lies on plane, then  $2(-\lambda + 3) + (\lambda - 4) + (6\lambda - 5) - 7 = 1$

$$\Rightarrow \lambda = 2 \quad 1$$

Required point is  $(1, -2, 7)$  1

**OR**

Equation of plane cutting intercepts (say,  $a, b, c$ ) on the axes is

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \text{ with } A(a, 0, 0), B(0, b, 0) \text{ and } C(0, 0, c) \quad 1$$

$$\text{distance of this plane from origin is } 3p = \frac{|-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}} \quad 1\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{9p^2} \quad \dots(i) \quad 1$$

$$\text{Centroid of } \Delta ABC \text{ is } \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right) = (x, y, z) \quad 1$$

$$\Rightarrow a = 3x, b = 3y, c = 3z, \text{ we get from (i)} \quad 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9x^2} + \frac{1}{9y^2} + \frac{1}{9z^2} = \frac{1}{9p^2} \quad \text{or} \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2} \quad 1$$

QUESTION PAPER CODE 65/2  
**EXPECTED ANSWER/VALUE POINTS**

**SECTION A**

1.  $-\log |\sin 2x| + c$  OR  $\log |\sec x| - \log |\sin x| + c.$  1
2. Writing the equations as  $\left. \begin{array}{l} 2x - y + 2z = 5 \\ 2x - y + 2z = 8 \end{array} \right\}$   $\frac{1}{2}$
- $\Rightarrow$  Distance = 1 unit  $\frac{1}{2}$
3.  $|A| = 8.$  1
4.  $k = 12.$  1

**SECTION B**

5. Event A: Number obtained is even

B: Number obtained is red.

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(\text{getting an even red number}) = \frac{1}{6} \quad \frac{1}{2}$$

$$\text{Since } P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq P(A \cap B) \text{ which is } \frac{1}{6} \quad \frac{1}{2}$$

$\therefore$  A and B are not independent events.

6. Let A works for x day and B for y days.

$$\therefore \text{ L.P.P. is Minimize } C = 300x + 400y \quad \frac{1}{2}$$

$$\text{Subject to: } \begin{cases} 6x + 10y \geq 60 \\ 4x + 4y \geq 32 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \quad 1\frac{1}{2}$$

$$7. \text{ Equation of line PQ is } \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-3} \quad \frac{1}{2}$$

$$\text{Any point on the line is } (3\lambda + 2, -\lambda + 2, -3\lambda + 1) \quad \frac{1}{2}$$

$$3\lambda + 2 = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \therefore z \text{ coord.} = -3\left(\frac{2}{3}\right) + 1 = -1. \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

**OR**

$$\begin{array}{ccc} \text{P} & \text{R} & \text{Q} \\ (2, 2, 1) & (4, y, z) & (5, 1, -2) \end{array}$$

Let R(4, y, z) lying on PQ divides PQ in the ratio k : 1

$$\Rightarrow 4 = \frac{5k+2}{k+1} \Rightarrow k = 2. \quad 1$$

$$\therefore z = \frac{2(-2)+1(1)}{2+1} = \frac{-3}{3} = -1. \quad 1$$

$$8. \int \frac{dx}{5-8x-x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{21})^2 - (x+4)^2} \quad 1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{21}} \log \left| \frac{\sqrt{21} + (x+4)}{\sqrt{21} - (x+4)} \right| + C \quad 1$$

$$9. \text{ Any skew symmetric matrix of order 3 is } A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \quad 1$$

$$\Rightarrow |A| = -a(bc) + a(bc) = 0 \quad 1$$

**OR**

$$\text{Since A is a skew-symmetric matrix } \therefore A^T = -A \quad \frac{1}{2}$$

$$\therefore |A^T| = |-A| = (-1)^3 |A| \quad \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |A| = -|A| \quad \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2|A| = 0 \text{ or } |A| = 0. \quad \frac{1}{2}$$

10.  $f(x) = x^3 - 3x$

$$\therefore f'(c) = 3c^2 - 3 = 0$$

$$\therefore c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1.$$

Rejecting  $c = 1$  as it does not belong to  $(-\sqrt{3}, 0)$ ,

we get  $c = -1$ .

$\frac{1}{2}$   
 $\frac{1}{2}$   
 $\frac{1}{2}$   
 $\frac{1}{2}$

11.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 100$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6$$

$$= 3[x^2 - 2x + 2] = 3[(x - 1)^2 + 1]$$

since  $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \therefore f(x)$  is increasing on  $\mathbb{R}$

$\frac{1}{2}$   
 $\frac{1}{2}$   
 $\frac{1}{2}$

12. Given  $\frac{dx}{dt} = -5$  cm/m.,  $\frac{dy}{dt} = 4$  cm/m.

$$A = xy \Rightarrow \frac{dA}{dt} = x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt}$$

$$= 8(4) + 6(-5) = 2$$

$\therefore$  Area is increasing at the rate of 2 cm<sup>2</sup>/minute.

1  
1

### SECTION C

13.  $I = \int_0^\pi \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x) \tan x}{\sec x + \tan x} dx$

$$\Rightarrow 2I = \pi \int_0^\pi \frac{\tan x}{\sec x + \tan x} dx = \pi \int_0^\pi \tan x (\sec x - \tan x) dx$$

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (\sec x \tan x - \sec^2 x + 1) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} [\sec x - \tan x + x]_0^\pi$$

$$= \frac{\pi(\pi - 2)}{2}$$

1  
1  
1  
1

OR

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^4 \{|x-1| + |x-2| + |x-4|\} dx \\
 &= \int_1^4 (x-1) dx - \int_1^2 (x-2) dx + \int_2^4 (x-2) dx - \int_1^4 (x-4) dx \\
 &= \left. \frac{(x-1)^2}{2} \right|_1^4 - \left. \frac{(x-2)^2}{2} \right|_1^2 + \left. \frac{(x-2)^2}{2} \right|_2^4 - \left. \frac{(x-4)^2}{2} \right|_1^4 \\
 &= \frac{9}{2} + \frac{1}{2} + 2 + \frac{9}{2} = 11\frac{1}{2} \text{ or } \frac{23}{2}
 \end{aligned}$$

14.  $\overline{AB} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$ ,  $\overline{BC} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ,  $\overline{CA} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$  1

Since  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ , are not parallel vectors, and  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \vec{0} \therefore A, B, C$  form a triangle 1

Also  $\overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0 \therefore A, B, C$  form a right triangle 1

$$\text{Area of } \Delta = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{BC}| = \frac{1}{2} \sqrt{210} \quad 1$$

15. Writing

|   |   |    |    |    |
|---|---|----|----|----|
| + | 1 | 3  | 5  | 7  |
| 1 | × | 4  | 6  | 8  |
| 3 | 4 | ×  | 8  | 10 |
| 5 | 6 | 8  | ×  | 12 |
| 7 | 8 | 10 | 12 | ×  |

$$\therefore X: \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \quad 1$$

$$\begin{aligned}
 P(X): & \quad \frac{2}{12} \quad \frac{2}{12} \quad \frac{4}{12} \quad \frac{2}{12} \quad \frac{2}{12} \\
 & = \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad 1
 \end{aligned}$$

$$xP(X): \quad \frac{4}{6} \quad \frac{6}{6} \quad \frac{16}{6} \quad \frac{10}{6} \quad \frac{12}{6}$$

$$x^2P(X): \quad \frac{16}{6} \quad \frac{36}{6} \quad \frac{128}{6} \quad \frac{100}{6} \quad \frac{144}{6}$$

$$\Sigma xP(x) = \frac{48}{6} = 8 \therefore \text{Mean} = 8 \quad 1$$

$$\text{Variance} = \Sigma x^2P(x) - [\Sigma xP(x)]^2 = \frac{424}{6} - 64 = \frac{20}{3} \quad 1$$

16. Let  $E_1$ : Selecting a student with 100% attendance }  
 $E_2$ : Selecting a student who is not regular } \quad 1

A: selected student attains A grade.

$$P(E_1) = \frac{30}{100} \text{ and } P(E_2) = \frac{70}{100} \quad \frac{1}{2}$$

$$P(A/E_1) = \frac{70}{100} \text{ and } P(A/E_2) = \frac{10}{100} \quad \frac{1}{2}$$

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1) \cdot P(A/E_1)}{P(E_1) \cdot P(A/E_1) + P(E_2) \cdot P(A/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{30}{100} \times \frac{70}{100}}{\frac{30}{100} \times \frac{70}{100} + \frac{70}{100} \times \frac{10}{100}}$$

$$= \frac{3}{4} \quad 1$$

Regularity is required everywhere or any relevant value \quad 1

17.  $\tan^{-1} \frac{x-3}{x-4} + \tan^{-1} \frac{x+3}{x+4} = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \tan^{-1} \left( \frac{\frac{x-3}{x-4} + \frac{x+3}{x+4}}{1 - \frac{x-3}{x-4} \cdot \frac{x+3}{x+4}} \right) = \frac{\pi}{4} \quad 1 \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 24}{-7} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{17}{2} \quad 1 \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{17}{2}} \quad 1$$

$$18. \Delta = \begin{vmatrix} a^2 + 2a & 2a + 1 & 1 \\ 2a + 1 & a + 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$R_1 \rightarrow R_1 - R_2 \text{ and } R_2 \rightarrow R_2 - R_3$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 - 1 & a - 1 & 0 \\ 2(a - 1) & a - 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad 1+1$$

$$= (a - 1)^2 \begin{vmatrix} a + 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad 1$$

Expanding

$$(a - 1)^2 \cdot (a - 1) = (a - 1)^3. \quad 1$$

**OR**

$$\text{Let } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \\ 9 & 22 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a - c & 2b - d \\ a & b \\ -3a + 4c & -3b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \\ 9 & 22 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\Rightarrow 2a - c = -1, \quad 2b - d = -8$$

$$a = 1, \quad b = -2 \quad 1$$

$$-3a + 4c = 9, \quad -3b + 4d = 22$$

Solving to get  $a = 1, b = -2, c = 3, d = 4$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$19. x^y + y^x = a^b$$

Let  $u + v = a^b$ , where  $x^y = u$  and  $y^x = v$ .

$$\therefore \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0 \quad \dots(i) \quad \frac{1}{2}$$



$$y \log x = \log u \Rightarrow \frac{du}{dx} = x^y \left[ \frac{y}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx} \right] \quad 1$$

$$x \log y = \log v \Rightarrow \frac{dv}{dx} = y^x \left[ \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \log y \right] \quad 1$$

$$\text{Putting in (i) } x^y \left[ \frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx} \right] + y^x \left[ \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \log y \right] = 0 \quad \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^x \log y + y \cdot x^{y-1}}{x^y \cdot \log x + x \cdot y^{x-1}} \quad 1$$

**OR**

$$e^y \cdot (x+1) = 1 \Rightarrow e^y \cdot 1 + (x+1) \cdot e^y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad 1 \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x+1)} \quad 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{1}{(x+1)^2} = \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \quad 1 \frac{1}{2}$$

$$20. \quad I = \int \frac{\sin \theta \, d\theta}{(4 + \cos^2 \theta)(2 - \sin^2 \theta)} = \int \frac{\sin \theta \, d\theta}{(4 + \cos^2 \theta)(1 + \cos^2 \theta)} \quad \frac{1}{2}$$

$$= -\int \frac{dt}{(4+t^2)(1+t^2)}, \text{ where } \cos \theta = t \quad 1$$

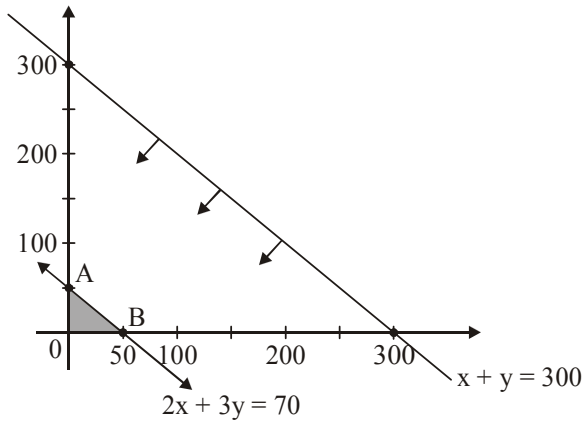
$$= \int \frac{1/3}{4+t^2} dt - \int \frac{1/3}{1+t^2} dt \quad 1$$

$$= \frac{1}{6} \tan^{-1} \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \tan^{-1} t + c \quad 1$$

$$= \frac{1}{6} \tan^{-1} \left( \frac{\cos \theta}{2} \right) - \frac{1}{3} \tan^{-1}(\cos \theta) + c \quad \frac{1}{2}$$

21.

Maximise:  $z = 34x + 45y$  subject to  $x + y \leq 300$ ,  
 $2x + 3y \leq 70$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$



Plotting the two lines.

2

Correct shading

1

$$z(A) = z\left(0, \frac{70}{3}\right) = 1050$$

$$z(B) = z(35, 0) = 1190$$

$$\Rightarrow \max(1190) \text{ at } x = 35, y = 0.$$

1

22. Points A, B, C and D are coplanar, then the vectors  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ , and  $\overline{AD}$  must be coplanar.

$$\overline{AB} = \hat{i} + (x-2)\hat{j} + 4\hat{k}; \quad \overline{AC} = \hat{i} - 3\hat{k}, \quad \overline{AD} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

 $1\frac{1}{2}$ 

$$\text{i.e., } \begin{vmatrix} 1 & x-2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

1

$$\Rightarrow 1(9) - (x-2)(7) + 4(3) = 0 \Rightarrow x = 5.$$

 $1\frac{1}{2}$ 

23. Given differential equation can be written as

$$y \frac{dx}{dy} - x = 2y^2 \quad \text{or} \quad \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y} \cdot x = 2y$$

1

$$\text{Integrating factor is } e^{-\log y} = \frac{1}{y}$$

1

$$\therefore \text{Solution is } x \cdot \frac{1}{y} = \int 2 dy = 2y + c$$

2

$$\text{or } x = 2y^2 + cy.$$

## SECTION D

24. Equation of line through  $(3, -4, -5)$  and  $(2, -3, 1)$  is

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{6} \quad \dots(i) \quad 1$$

Eqn. of plane through the three given points is

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)(12) - (y-2)(-6) + (z-3)(6) = 0$$

$$\text{or } 2x + y + z - 7 = 0 \quad \dots(ii) \quad 2$$

Any point on line (i) is  $(-\lambda + 3, \lambda - 4, 6\lambda - 5)$  1

If this point lies on plane, then  $2(-\lambda + 3) + (\lambda - 4) + (6\lambda - 5) - 7 = 1$

$$\Rightarrow \lambda = 2 \quad 1$$

Required point is  $(1, -2, 7)$  1

**OR**

Equation of plane cutting intercepts (say,  $a, b, c$ ) on the axes is

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \text{ with } A(a, 0, 0), B(0, b, 0) \text{ and } C(0, 0, c) \quad 1$$

$$\text{distance of this plane from origin is } 3p = \frac{|-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}} \quad 1\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{9p^2} \quad \dots(i) \quad 1$$

$$\text{Centroid of } \Delta ABC \text{ is } \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right) = (x, y, z) \quad 1$$

$$\Rightarrow a = 3x, b = 3y, c = 3z, \text{ we get from (i)} \quad 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9x^2} + \frac{1}{9y^2} + \frac{1}{9z^2} = \frac{1}{9p^2} \text{ or } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2} \quad 1$$

$$25. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x-y} = \frac{1+\frac{2y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{y}{x} = v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad \therefore v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v} \quad \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = -\frac{1+2v-v+v^2}{v-1} \Rightarrow \int \frac{v-1}{v^2+v+1} dv = -\frac{dx}{x} \quad 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{2v+1-3}{v^2+v+1} dv = \int -\frac{2}{x} dx \Rightarrow \int \frac{2v+1}{v^2+v+1} dv - 3 \int \frac{1}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dv = -\int \frac{2}{x} dx \quad 1+1$$

$$\Rightarrow \log |v^2+v+1| - 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left( \frac{2v+1}{\sqrt{3}} \right) = -\log |x|^2 + c \quad 1$$

$$\Rightarrow \log |y^2+xy+x^2| - 2\sqrt{3} \tan^{-1} \left( \frac{2y+x}{\sqrt{3}x} \right) = c \quad \frac{1}{2}$$

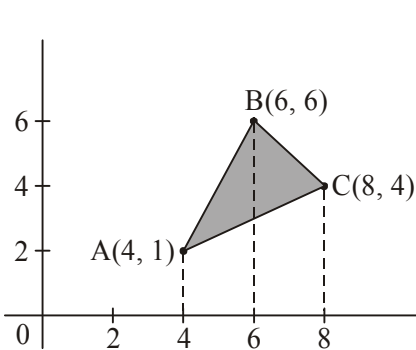
$$x=1, y=0 \Rightarrow c = -2\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \pi \quad \frac{1}{2}$$

$$\therefore \log |y^2+xy+x^2| - 2\sqrt{3} \tan^{-1} \left( \frac{2y+x}{\sqrt{3}x} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \pi = 0$$

26.

Figure

1



$$\left. \begin{aligned} \text{Equation of AB: } y &= \frac{5}{2}x - 9 \\ \text{Equation of BC: } y &= 12 - x \\ \text{Equation of AC: } y &= \frac{3}{4}x - 2 \end{aligned} \right\}$$

 $\frac{1}{2}$ 

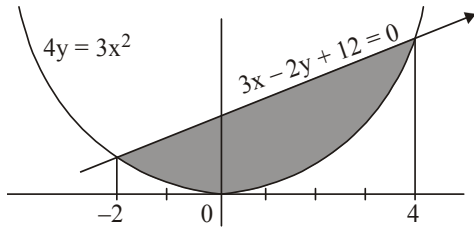
$$\therefore \text{Area (A)} = \int_4^6 \left( \frac{5}{2}x - 9 \right) dx + \int_6^8 (12 - x) dx - \int_4^8 \left( \frac{3}{4}x - 2 \right) dx \quad 1$$

$$= \left[ \frac{5}{4}x^2 - 9x \right]_4^6 + \left[ 12x - \frac{x^2}{2} \right]_6^8 - \left[ \frac{3}{8}x^2 - 2x \right]_4^8 \quad \frac{1}{2}$$

$$= 7 + 10 - 10 = 7 \text{ sq.units} \quad 1$$

Figure

1



$$4y = 3x^2 \text{ and } 3x - 2y + 12 = 0 \Rightarrow 4\left(\frac{3x+12}{2}\right) = 3x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 24 = 0 \text{ or } x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow \text{x-coordinates of points of intersection are } x = -2, x = 4$$

1

$$\therefore \text{Area (A)} = \int_{-2}^4 \left[ \frac{1}{2}(3x+12) - \frac{3}{4}x^2 \right] dx$$

$$= \left[ \frac{1}{2} \frac{(3x+12)^2}{6} - \frac{3}{4} \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^4$$

$$= 45 - 18 = 27 \text{ sq.units}$$

 $1\frac{1}{2}$  $1\frac{1}{2}$ 

1

27. Let  $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{4}{3} \right\}$  and  $f(x_1) = f(x_2)$

 $\frac{1}{2}$ 

$$\Rightarrow \frac{4x_1+3}{3x_1+4} = \frac{4x_2+3}{3x_2+4} \Rightarrow (4x_1+3)(3x_2+4) = (3x_1+4)(4x_2+3)$$

$$\Rightarrow 12x_1x_2 + 16x_1 + 9x_2 + 12 = 12x_1x_2 + 16x_2 + 9x_1 + 12$$

$$\Rightarrow 16(x_1 - x_2) - 9(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Hence  $f$  is a 1-1 function

2

Let  $y = \frac{4x+3}{3x+4}$ , for  $y \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{3} \right\}$

$$3xy + 4y = 4x + 3 \Rightarrow 4x - 3xy = 4y - 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{4y-3}{4-3y} \quad \therefore \forall y \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{3} \right\}, x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{4}{3} \right\}$$

Hence  $f$  is ONTO and so bijective

2

and  $f^{-1}(y) = \frac{4y-3}{4-3y}; y \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{3} \right\}$

1

$$f^{-1}(0) = -\frac{3}{4} \quad \frac{1}{2}$$

$$\text{and } f^{-1}(x) = 2 \Rightarrow \frac{4x-3}{4-3x} = 2$$

$$\Rightarrow 4x - 3 = 8 - 6x$$

$$\Rightarrow 10x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{10} \quad \frac{1}{2}$$

**OR**

$$(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad); (a, b), (c, d) \in A$$

$$(c, d) * (a, b) = (ca, d + bc)$$

Since  $b + ad \neq d + bc \Rightarrow *$  is NOT comutative  $\frac{1}{2}$

for associativity, we have,

$$[(a,b) * (c, d)] * (e, f) = (ac, b + ad) * (e, f) = (ace, b + ad + acf)$$

$$(a, b) * [(c, d) * (e, f)] = (a, b) * (ce, d + cf) = (ace, b + ad + acf) \quad \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow *$  is associative

(i) Let  $(e, f)$  be the identity element in  $A$

$$\text{Then } (a, b) * (e, f) = (a, b) = (e, f) * (a, b)$$

$$\Rightarrow (ae, b + af) = (a, b) = (ae, f + be)$$

$$\Rightarrow e = 1, f = 0 \Rightarrow (1, 0) \text{ is the identity element} \quad \frac{1}{2}$$

(ii) Let  $(c, d)$  be the inverse element for  $(a, b)$

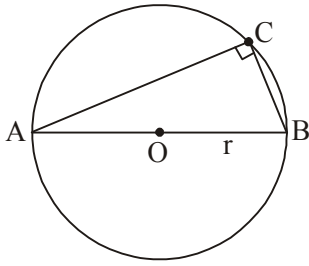
$$\Rightarrow (a, b) * (c, d) = (1, 0) = (c, d) * (a, b)$$

$$\Rightarrow (ac, b + ad) = (1, 0) = (ac, d + bc)$$

$$\Rightarrow ac = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{a} \text{ and } b + ad = 0 \Rightarrow d = -\frac{b}{a} \text{ and } d + bc = 0 \Rightarrow d = -bc = -b\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right), a \neq 0 \text{ is the inverse of } (a, b) \in A \quad \frac{1}{2}$$

28.



Correct Figure

1

Let the length of sides of  $\Delta ABC$  are,  $AC = x$  and  $BC = y$ 

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4r^2 \text{ and Area } A = \frac{1}{2}xy$$

1

$$A = \frac{1}{2}x\sqrt{4r^2 - x^2} \text{ or } S = \frac{x^2}{4}(4r^2 - x^2)$$

$$S = \frac{1}{4}[4r^2x^2 - x^4]$$

1

$$\therefore \frac{dS}{dx} = \frac{1}{4}[8r^2x - 4x^3]$$

$$\frac{dS}{dx} = 0 \Rightarrow 2r^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}r$$

1

$$\text{and } y = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2}r$$

 $\frac{1}{2}$ 

$$\text{and } \frac{d^2S}{dx^2} = \frac{1}{4}[8r^2 - 12x^2] = \frac{1}{4}[8r^2 - 24r^2] < 0$$

1

$\therefore$  For maximum area,  $x = y$  i.e.,  $\Delta$  is isosceles.

 $\frac{1}{2}$ 

$$29. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2(0) + 3(-2) + 5(1) = -1 \neq 0$$

1

$$A_{11} = 0, A_{12} = 2, A_{13} = 1$$

$$A_{21} = -1, A_{22} = -9, A_{23} = -5$$

2

$$A_{31} = 2, A_{32} = 23, A_{33} = 13$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -1 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -9 & -5 \\ 2 & 23 & 13 \end{pmatrix}^T = -1 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & 23 \\ 1 & -5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}$$

Given equations can be written as

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad AX = B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B \quad 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 1, y = 2, z = 3. \quad 1\frac{1}{2}$$



QUESTION PAPER CODE 65/3  
**EXPECTED ANSWER/VALUE POINTS**

**SECTION A**

1.  $k = 12.$  1
2.  $|A| = 8.$  1
3. Writing the equations as  $\left. \begin{array}{l} 2x - y + 2z = 5 \\ 2x - y + 2z = 8 \end{array} \right\}$   $\frac{1}{2}$
- $\Rightarrow$  Distance = 1 unit  $\frac{1}{2}$
4.  $-\log |\sin 2x| + c$  OR  $\log |\sec x| - \log |\sin x| + c.$  1

**SECTION B**

5.  $\int \frac{dx}{5 - 8x - x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{21})^2 - (x + 4)^2}$  1

$$= \frac{1}{2\sqrt{21}} \log \left| \frac{\sqrt{21} + (x + 4)}{\sqrt{21} - (x + 4)} \right| + c$$
 1

6. Let A works for x day and B for y days.
- $\therefore$  L.P.P. is Minimize  $C = 300x + 400y$   $\frac{1}{2}$
- Subject to:  $\begin{cases} 6x + 10y \geq 60 \\ 4x + 4y \geq 32 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$   $1 \frac{1}{2}$

7. Event A: Number obtained is even
- B: Number obtained is red.
- $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$   $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
- $P(A \cap B) = P(\text{getting an even red number}) = \frac{1}{6}$   $\frac{1}{2}$
- Since  $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq P(A \cap B)$  which is  $\frac{1}{6}$   $\frac{1}{2}$
- $\therefore$  A and B are not independent events.

$$8. \text{ Equation of line PQ is } \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-3} \quad \frac{1}{2}$$

$$\text{Any point on the line is } (3\lambda + 2, -\lambda + 2, -3\lambda + 1) \quad \frac{1}{2}$$

$$3\lambda + 2 = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \therefore z \text{ coord.} = -3\left(\frac{2}{3}\right) + 1 = -1. \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

**OR**

$$\begin{array}{ccc} \text{P} & \text{R} & \text{Q} \\ \hline (2, 2, 1) & (4, y, z) & (5, 1, -2) \end{array}$$

Let R(4, y, z) lying on PQ divides PQ in the ratio k : 1

$$\Rightarrow 4 = \frac{5k+2}{k+1} \Rightarrow k = 2. \quad 1$$

$$\therefore z = \frac{2(-2)+1(1)}{2+1} = \frac{-3}{3} = -1. \quad 1$$

$$9. f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 100$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 \quad \frac{1}{2}$$

$$= 3[x^2 - 2x + 2] = 3[(x-1)^2 + 1] \quad 1$$

$$\text{since } f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \therefore f(x) \text{ is increasing on } \mathbb{R} \quad \frac{1}{2}$$

$$10. f(x) = x^3 - 3x$$

$$\therefore f'(c) = 3c^2 - 3 = 0 \quad \frac{1}{2}$$

$$\therefore c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1. \quad \frac{1}{2}$$

$$\text{Rejecting } c = 1 \text{ as it does not belong to } (-\sqrt{3}, 0), \quad \frac{1}{2}$$

$$\text{we get } c = -1. \quad \frac{1}{2}$$

$$11. \text{ Any skew symmetric matrix of order 3 is } A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \quad 1$$

$$\Rightarrow |A| = -a(bc) + a(bc) = 0 \quad 1$$

**OR**

Since A is a skew-symmetric matrix  $\therefore A^T = -A$

$$\therefore |A^T| = |-A| = (-1)^3 |A|$$

$$\Rightarrow |A| = -|A|$$

$$\Rightarrow 2|A| = 0 \text{ or } |A| = 0.$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

12.  $\frac{dV}{dt} = 8 \text{ cm}^3/\text{s}$ , where V is the volume of sphere i.e.,  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{dV}{dt}$$

$$S = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt} = 8\pi r \cdot \frac{1}{4\pi r^2} \cdot 8$$

$$= \frac{2 \times 8}{12} = \frac{4}{3} \text{ cm}^2/\text{s}$$

1

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$
**SECTION C**

13. Writing

|   |   |    |    |    |
|---|---|----|----|----|
| + | 1 | 3  | 5  | 7  |
| 1 | × | 4  | 6  | 8  |
| 3 | 4 | ×  | 8  | 10 |
| 5 | 6 | 8  | ×  | 12 |
| 7 | 8 | 10 | 12 | ×  |

$$\therefore X : \quad \quad \quad 4 \quad \quad 6 \quad \quad 8 \quad \quad 10 \quad \quad 12$$

$$P(X) : \quad \quad \quad \frac{2}{12} \quad \quad \frac{2}{12} \quad \quad \frac{4}{12} \quad \quad \frac{2}{12} \quad \quad \frac{2}{12}$$

$$= \frac{1}{6} \quad \quad \frac{1}{6} \quad \quad \frac{2}{6} \quad \quad \frac{1}{6} \quad \quad \frac{1}{6}$$

$$xP(X) : \quad \quad \quad \frac{4}{6} \quad \quad \frac{6}{6} \quad \quad \frac{16}{6} \quad \quad \frac{10}{6} \quad \quad \frac{12}{6}$$

$$x^2P(X) : \quad \quad \quad \frac{16}{6} \quad \quad \frac{36}{6} \quad \quad \frac{128}{6} \quad \quad \frac{100}{6} \quad \quad \frac{144}{6}$$

1

1

$$\Sigma xP(x) = \frac{48}{6} = 8 \therefore \text{Mean} = 8 \quad 1$$

$$\text{Variance} = \Sigma x^2P(x) - [\Sigma xP(x)]^2 = \frac{424}{6} - 64 = \frac{20}{3} \quad 1$$

$$14. \quad \overline{AB} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}, \overline{BC} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \overline{CA} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k} \quad 1$$

Since  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ , are not parallel vectors, and  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \vec{0} \therefore A, B, C$  form a triangle 1

$$\text{Also } \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0 \therefore A, B, C \text{ form a right triangle} \quad 1$$

$$\text{Area of } \Delta = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{BC}| = \frac{1}{2} \sqrt{210} \quad 1$$

$$15. \quad \left. \begin{array}{l} \text{Let } E_1: \text{Selecting a student with 100\% attendance} \\ E_2: \text{Selecting a student who is not regular} \end{array} \right\} \quad 1$$

A: selected student attains A grade.

$$P(E_1) = \frac{30}{100} \text{ and } P(E_2) = \frac{70}{100} \quad \frac{1}{2}$$

$$P(A/E_1) = \frac{70}{100} \text{ and } P(A/E_2) = \frac{10}{100} \quad \frac{1}{2}$$

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1) \cdot P(A/E_1)}{P(E_1) \cdot P(A/E_1) + P(E_2) \cdot P(A/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{30}{100} \times \frac{70}{100}}{\frac{30}{100} \times \frac{70}{100} + \frac{70}{100} \times \frac{10}{100}}$$

$$= \frac{3}{4} \quad 1$$

Regularity is required everywhere or any relevant value 1

$$16. \quad \tan^{-1} \frac{x-3}{x-4} + \tan^{-1} \frac{x+3}{x+4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} \left( \frac{\frac{x-3}{x-4} + \frac{x+3}{x+4}}{1 - \frac{x-3}{x-4} \cdot \frac{x+3}{x+4}} \right) = \frac{\pi}{4} \quad 1 \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 24}{-7} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{17}{2}$$

1  $\frac{1}{2}$ 

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{17}{2}}$$

1

$$17. \Delta = \begin{vmatrix} a^2 + 2a & 2a + 1 & 1 \\ 2a + 1 & a + 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$R_1 \rightarrow R_1 - R_2 \text{ and } R_2 \rightarrow R_2 - R_3$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 - 1 & a - 1 & 0 \\ 2(a - 1) & a - 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

1+1

$$= (a - 1)^2 \begin{vmatrix} a + 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

1

Expanding

$$(a - 1)^2 \cdot (a - 1) = (a - 1)^3.$$

1

**OR**

$$\text{Let } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$$

1

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a - c & 2b - d \\ a & b \\ -3a + 4c & -3b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$$

1

$$\Rightarrow 2a - c = -1, \quad 2b - d = -8$$

$$a = 1, \quad b = -2$$

1

$$-3a + 4c = 9, \quad -3b + 4d = 22$$

Solving to get  $a = 1, b = -2, c = 3, d = 4$ 

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1

18.  $x^y + y^x = a^b$

Let  $u + v = a^b$ , where  $x^y = u$  and  $y^x = v$ .

$$\therefore \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0 \quad \dots(i) \quad \frac{1}{2}$$

$$y \log x = \log u \Rightarrow \frac{du}{dx} = x^y \left[ \frac{y}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx} \right] \quad 1$$

$$x \log y = \log v \Rightarrow \frac{dv}{dx} = y^x \left[ \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \log y \right] \quad 1$$

$$\text{Putting in (i)} \quad x^y \left[ \frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx} \right] + y^x \left[ \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \log y \right] = 0 \quad \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^x \log y + y \cdot x^{y-1}}{x^y \cdot \log x + x \cdot y^{x-1}} \quad 1$$

**OR**

$$e^y \cdot (x+1) = 1 \Rightarrow e^y \cdot 1 + (x+1) \cdot e^y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad 1 \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x+1)} \quad 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{1}{(x+1)^2} = \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \quad 1 \frac{1}{2}$$

19.  $I = \int_0^\pi \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x) \tan x}{\sec x + \tan x} dx \quad 1$

$$\Rightarrow 2I = \pi \int_0^\pi \frac{\tan x}{\sec x + \tan x} dx = \pi \int_0^\pi \tan x (\sec x - \tan x) dx$$

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (\sec x \tan x - \sec^2 x + 1) dx \quad 1$$

$$= \frac{\pi}{2} [\sec x - \tan x + x]_0^\pi \quad 1$$

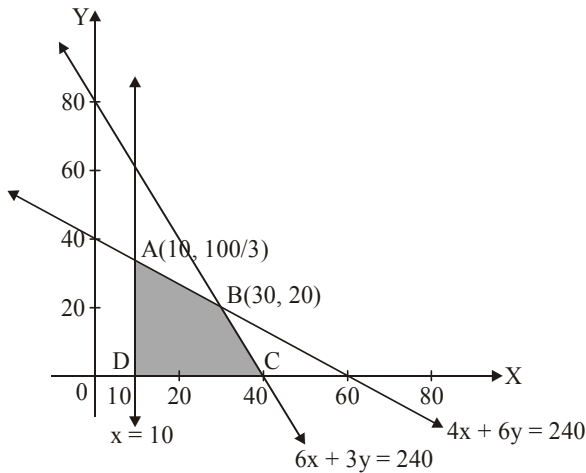
$$= \frac{\pi(\pi - 2)}{2} \quad 1$$

OR

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^4 \{|x-1| + |x-2| + |x-4|\} dx \\
 &= \int_1^2 (x-1) dx - \int_1^2 (x-2) dx + \int_2^4 (x-2) dx - \int_1^4 (x-4) dx \\
 &= \left. \frac{(x-1)^2}{2} \right|_1^2 - \left. \frac{(x-2)^2}{2} \right|_1^2 + \left. \frac{(x-2)^2}{2} \right|_2^4 - \left. \frac{(x-4)^2}{2} \right|_1^4 \\
 &= \frac{9}{2} + \frac{1}{2} + 2 + \frac{9}{2} = 11\frac{1}{2} \text{ or } \frac{23}{2}
 \end{aligned}$$

20.

Maximise  $z = 7x + 10y$ , subject to  $4x + 6y \leq 240$ ;  
 $6x + 3y \leq 240$ ;  $x \geq 10$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$



Correct graph of three lines

For correct shading

$$Z(A) = Z\left(10, \frac{200}{6}\right) = 70 + 10 \times \frac{100}{3} = 403\frac{1}{3}$$

$$Z(B) = Z(30, 20) = 210 + 200 = 410$$

$$Z(C) = Z(40, 0) = 280 + 0 = 280$$

$$Z(D) = Z(10, 0) = 70 + 0 = 70$$

$$\Rightarrow \text{Max} (= 410) \text{ at } x = 30, y = 20$$

$$21. \quad I = \int \frac{e^x dx}{(e^x - 1)^2 (e^x + 2)} = \int \frac{dt}{(t+2)(t-1)^2} \text{ where } e^x = t$$

$$= \int \frac{1/9}{(t+2)} dt - \int \frac{1/9}{(t-1)} dt + \int \frac{1/3}{(t-1)^2} dt$$

$$= \frac{1}{9} [\log |t+2| - \log |t-1|] - \frac{1}{3(t-1)} + c$$

$$= \frac{1}{9} \log \left| \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \right| - \frac{1}{3(e^x - 1)} + c$$

$$22. \quad \vec{b}_1 \parallel \vec{a} \Rightarrow \text{let } \vec{b}_1 = \lambda(2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}) \quad \frac{1}{2}$$

$$\vec{b}_2 = \vec{b} - \vec{b}_1 = (7\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - (2\lambda\hat{i} - \lambda\hat{j} - 2\lambda\hat{k}) \quad \frac{1}{2}$$

$$= (7 - 2\lambda)\hat{i} + (2 + \lambda)\hat{j} - (3 - 2\lambda)\hat{k} \quad 1$$

$$\vec{b}_2 \perp \vec{a} \Rightarrow 2(7 - 2\lambda) - 1(2 + \lambda) + 2(3 - 2\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 2 \quad 1$$

$$\therefore \vec{b}_1 = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k} \text{ and } \vec{b}_2 = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k} \quad 1$$

$$\Rightarrow (7\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = (4\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}) + (3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k})$$

$$23. \quad \text{Given differential equation is } \frac{dy}{dx} - y = \sin x \quad \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Integrating factor} = e^{-x}$$

$$\therefore \text{Solution is: } \lambda e^{-x} = \int \sin x e^{-x} dx = I_1 \quad 1$$

$$I_1 = -\sin x e^{-x} + \int \cos x e^{-x} dx$$

$$= -\sin x e^{-x} + [-\cos x e^{-x} - \int +\sin x e^{-x} dx]$$

$$I_1 = \frac{1}{2}[-\sin x - \cos x]e^{-x} \quad 1 \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{Solution is } \lambda e^{-x} = \frac{1}{2}(-\sin x - \cos x)e^{-x} + c \quad 1$$

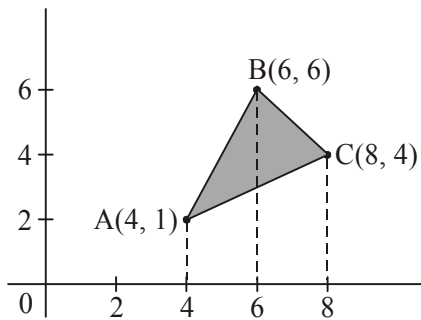
$$\text{or } y = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + ce^x$$



24.

Figure

1



$$\left. \begin{aligned} \text{Equation of AB : } y &= \frac{5}{2}x - 9 \\ \text{Equation of BC : } y &= 12 - x \\ \text{Equation of AC : } y &= \frac{3}{4}x - 2 \end{aligned} \right\}$$

$1\frac{1}{2}$

$$\therefore \text{Area (A)} = \int_4^6 \left( \frac{5}{2}x - 9 \right) dx + \int_6^8 (12 - x) dx - \int_4^8 \left( \frac{3}{4}x - 2 \right) dx$$

1

$$= \left[ \frac{5}{4}x^2 - 9x \right]_4^6 + \left[ 12x - \frac{x^2}{2} \right]_6^8 - \left[ \frac{3}{8}x^2 - 2x \right]_4^8$$

$1\frac{1}{2}$

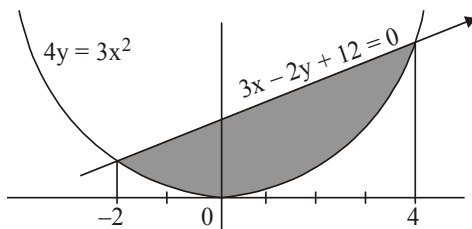
$$= 7 + 10 - 10 = 7 \text{ sq.units}$$

1

OR

Figure

1



$$4y = 3x^2 \text{ and } 3x - 2y + 12 = 0 \Rightarrow 4 \left( \frac{3x + 12}{2} \right) = 3x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 24 = 0 \text{ or } x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \text{x-coordinates of points of intersection are } x = -2, x = 4$$

1

$$\therefore \text{Area (A)} = \int_{-2}^4 \left[ \frac{1}{2}(3x + 12) - \frac{3}{4}x^2 \right] dx$$

$1\frac{1}{2}$

$$= \left[ \frac{1}{2} \frac{(3x + 12)^2}{6} - \frac{3}{4} \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^4$$

$1\frac{1}{2}$

$$= 45 - 18 = 27 \text{ sq.units}$$

1

$$25. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x-y} = \frac{1+\frac{2y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{y}{x} = v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad \therefore v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v} \quad \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1+2v-v+v^2}{v-1} \Rightarrow \int \frac{v-1}{v^2+v+1} dv = -\frac{dx}{x} \quad 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{2v+1-3}{v^2+v+1} dv = \int -\frac{2}{x} dx \Rightarrow \int \frac{2v+1}{v^2+v+1} dv - 3 \int \frac{1}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dv = -\int \frac{2}{x} dx \quad 1+1$$

$$\Rightarrow \log |v^2+v+1| - 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left( \frac{2v+1}{\sqrt{3}} \right) = -\log |x|^2 + c \quad 1$$

$$\Rightarrow \log |y^2+xy+x^2| - 2\sqrt{3} \tan^{-1} \left( \frac{2y+x}{\sqrt{3}x} \right) = c \quad \frac{1}{2}$$

$$x=1, y=0 \Rightarrow c = -2\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \pi \quad \frac{1}{2}$$

$$\therefore \log |y^2+xy+x^2| - 2\sqrt{3} \tan^{-1} \left( \frac{2y+x}{\sqrt{3}x} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \pi = 0$$

26. Equation of line through (3, -4, -5) and (2, -3, 1) is

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{6} \quad \dots(i) \quad 1$$

Eqn. of plane through the three given points is

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)(12) - (y-2)(-6) + (z-3)(6) = 0$$

$$\text{or } 2x + y + z - 7 = 0 \quad \dots(ii) \quad 2$$

Any point on line (i) is  $(-\lambda + 3, \lambda - 4, 6\lambda - 5)$  1

If this point lies on plane, then  $2(-\lambda + 3) + (\lambda - 4) + (6\lambda - 5) - 7 = 1$

$$\Rightarrow \lambda = 2$$

1

Required point is (1, -2, 7)

1

**OR**

Equation of plane cutting intercepts (say, a, b, c) on the axes is

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \text{ with } A(a, 0, 0), B(0, b, 0) \text{ and } C(0, 0, c)$$

1

$$\text{distance of this plane from origin is } 3p = \frac{|-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}}$$

 $1\frac{1}{2}$ 

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{9p^2} \quad \dots(i)$$

1

$$\text{Centroid of } \triangle ABC \text{ is } \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right) = (x, y, z)$$

1

$$\Rightarrow a = 3x, b = 3y, c = 3z, \text{ we get from (i)}$$

 $\frac{1}{2}$ 

$$\frac{1}{9x^2} + \frac{1}{9y^2} + \frac{1}{9z^2} = \frac{1}{9p^2} \quad \text{or} \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2}$$

1

27. Let  $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$  and  $f(x_1) = f(x_2)$

 $\frac{1}{2}$ 

$$\Rightarrow \frac{4x_1 + 3}{3x_1 + 4} = \frac{4x_2 + 3}{3x_2 + 4} \Rightarrow (4x_1 + 3)(3x_2 + 4) = (3x_1 + 4)(4x_2 + 3)$$

$$\Rightarrow 12x_1x_2 + 16x_1 + 9x_2 + 12 = 12x_1x_2 + 16x_2 + 9x_1 + 12$$

$$\Rightarrow 16(x_1 - x_2) - 9(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Hence f is a 1-1 function

2

$$\text{Let } y = \frac{4x + 3}{3x + 4}, \text{ for } y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$$

$$3xy + 4y = 4x + 3 \Rightarrow 4x - 3xy = 4y - 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{4y - 3}{4 - 3y} \quad \therefore \forall y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}, x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$$

Hence  $f$  is ONTO and so bijective

2

$$\text{and } f^{-1}(y) = \frac{4y-3}{4-3y}; y \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{3} \right\}$$

1

$$f^{-1}(0) = -\frac{3}{4}$$

 $\frac{1}{2}$ 

$$\text{and } f^{-1}(x) = 2 \Rightarrow \frac{4x-3}{4-3x} = 2$$

$$\Rightarrow 4x - 3 = 8 - 6x$$

$$\Rightarrow 10x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{10}$$

 $\frac{1}{2}$ 

**OR**

$$(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad); (a, b), (c, d) \in A$$

$$(c, d) * (a, b) = (ca, d + bc)$$

Since  $b + ad \neq d + bc \Rightarrow *$  is NOT comutative

 $1\frac{1}{2}$ 

for associativity, we have,

$$[(a,b) * (c, d)] * (e, f) = (ac, b + ad) * (e, f) = (ace, b + ad + acf)$$

$$(a, b) * [(c, d) * (e, f)] = (a, b) * (ce, d + cf) = (ace, b + ad + acf)$$

 $1\frac{1}{2}$ 

$\Rightarrow *$  is associative

(i) Let  $(e, f)$  be the identity element in  $A$

$$\text{Then } (a, b) * (e, f) = (a, b) = (e, f) * (a, b)$$

$$\Rightarrow (ae, b + af) = (a, b) = (ae, f + be)$$

$$\Rightarrow e = 1, f = 0 \Rightarrow (1, 0) \text{ is the identity element}$$

 $1\frac{1}{2}$ 

(ii) Let  $(c, d)$  be the inverse element for  $(a, b)$

$$\Rightarrow (a, b) * (c, d) = (1, 0) = (c, d) * (a, b)$$

$$\Rightarrow (ac, b + ad) = (1, 0) = (ac, d + bc)$$

$$\Rightarrow ac = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{a} \text{ and } b + ad = 0 \Rightarrow d = -\frac{b}{a} \text{ and } d + bc = 0 \Rightarrow d = -bc = -b\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right), a \neq 0 \text{ is the inverse of } (a, b) \in A$$

 $1\frac{1}{2}$

$$28. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2(0) + 3(-2) + 5(1) = -1 \neq 0 \quad 1$$

$$A_{11} = 0, A_{12} = 2, A_{13} = 1$$

$$A_{21} = -1, A_{22} = -9, A_{23} = -5 \quad 2$$

$$A_{31} = 2, A_{32} = 23, A_{33} = 13$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -1 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -9 & -5 \\ 2 & 23 & 13 \end{pmatrix}^T = -1 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & 23 \\ 1 & -5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}$$

Given equations can be written as

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad AX = B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B \quad 1$$

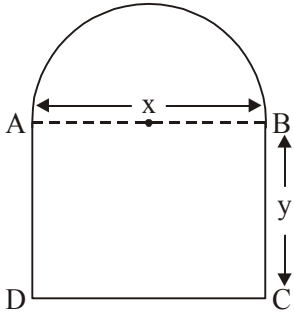
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 1, y = 2, z = 3. \quad 1 \frac{1}{2}$$

29.

Figure

1



Let dimensions of the rectangle be  $x$  and  $y$  (as shown)

$$\therefore \text{Perimeter of window } p = 2y + x + \pi \frac{x}{2} = 10 \text{ m} \quad \dots(i)$$

 $\frac{1}{2}$ 

$$\text{Area of window } A = xy + \frac{1}{2} \pi \frac{x^2}{4}$$

 $\frac{1}{2}$ 

$$A = x \left[ 5 - \frac{x}{2} - \pi \frac{x}{4} \right] + \frac{1}{2} \pi \frac{x^2}{4}$$

$$= 5x - \frac{x^2}{2} - \pi \frac{x^2}{8}$$

1

$$\frac{dA}{dx} = 5 - x - \pi \frac{x}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{20}{4 + \pi}$$

1

$$\frac{d^2A}{dx^2} = \left( -1 - \frac{\pi}{4} \right) < 0$$

1

$$\Rightarrow x = \frac{20}{4 + \pi}, y = \frac{10}{4 + \pi} \text{ will give maximum light.}$$

1