SET – 1

Series : GBM/1/C

कोड नं.
Code No. 65/1/1

रोल नं.
Roll No. | | | | | | | |

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।
Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न–पत्र में मुद्रित पृष्ठ **8** हैं ।
- प्रश्न–पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर–पुस्तिका के मुख–पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न–पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न–पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न–पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न–पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर–पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **8** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे — *अधिकतम अंक : 100*

*Time allowed : **3** hours* — *Maximum Marks : **100***

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न पत्र में **29** प्रश्न हैं जो चार खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब, स तथा द । खण्ड अ में **4** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **एक अंक** का है । खण्ड ब में **8** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **दो अंक** का है । खण्ड स में **11** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **चार अंक** का है । खण्ड द में **6** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **छः अंक** का है ।*

(iii) *खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकतानुसार दिए जा सकते हैं ।*

(iv) *पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले **3** प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले **3** प्रश्नों में आंतरिक विकल्प हैं । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।*

(v) *कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है । यदि आवश्यक हो, तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं ।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *This question paper consists of* ***29*** *questions divided into four sections* ***A, B, C*** *and* ***D****. Section* ***A*** *comprises of* ***4*** *questions of* ***one*** *mark each, Section* ***B*** *comprises of* ***8*** *questions of* ***two*** *marks each, Section* ***C*** *comprises of* ***11*** *questions of* ***four*** *marks each and Section* ***D*** *comprises of* ***6*** *questions of* ***six*** *marks each.*

(iii) *All questions in Section* ***A*** *are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*

(iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in* ***3*** *questions of* ***four*** *marks each and* ***3*** *questions of* ***six*** *marks each. You have to attempt only* ***one*** *of the alternatives in all such questions.*

(v) *Use of calculators is* ***not*** *permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.*

खण्ड – अ

SECTION – A

प्रश्न संख्या 1 से 4 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

Question numbers **1** to **4** carry **1** mark each.

1. माना A तथा B क्रमश: कोटि 3×2 तथा 2×4 के आव्यूह हैं तो आव्यूह (AB) की कोटि लिखिए ।

Let A and B are matrices of order 3×2 and 2×4 respectively. Write the order of matrix (AB).

2. वक्र $y = \sin x$ के बिंदु (0, 0) पर खींची गई स्पर्श–रेखा का समीकरण लिखिए ।

Write the equation of tangent drawn to the curve $y = \sin x$ at the point (0, 0).

3. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{1}{x(1 + \log x)} \, dx$

Find : $\int \frac{1}{x(1 + \log x)} \, dx$

4. सदिशों $\vec{a} \times \vec{b}$ तथा $\vec{b} \times \vec{a}$ के बीच का कोण लिखिए ।

Write the angle between the vectors $\vec{a} \times \vec{b}$ and $\vec{b} \times \vec{a}$.

खण्ड – ब

SECTION – B

प्रश्न संख्या 5 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न के 2 अंक हैं ।

Question numbers **5** to **12** carry **2** marks each.

5. निम्न आव्यूह समीकरण में प्रारंभिक संक्रिया $R_2 \to R_2 + R_1$ का प्रयोग करने के पश्चात प्राप्त समीकरण लिखिए :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$$

In the following matrix equation use elementary operation $R_2 \to R_2 + R_1$ and write the equation thus obtained.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$$

6. k का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए फलन

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \text{k}, & x = 2 \end{cases}$$

$x = 2$ पर संतत हो ।

Find the value of k for which the function

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \text{k}, & x = 2 \end{cases}$$

is continuous at $x = 2$.

7. एक लंबवृत्तीय शंकु की त्रिज्या r, 3 सेमी/मिनट की दर से घट रही है और ऊँचाई h, 2 सेमी/मिनट की दर से बढ़ रही है । जब r = 9 सेमी और h = 6 सेमी है, तब शंकु के आयतन में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए ।

The radius r of a right circular cone is decreasing at the rate of 3 cm/minute and the height h is increasing at the rate of 2 cm/minute. When r = 9 cm and h = 6 cm, find the rate of change of its volume.

8. ज्ञात कीजिए : $\int \sqrt{x^2 - 2x}\, dx$

Find : $\int \sqrt{x^2 - 2x}\, dx$

9. वक्रों $y^2 = 4ax$ के कुलों का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the differential equation of the family of curves $y^2 = 4\, ax$.

10. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

Find the general solution of the differential equation

$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$

11. यदि बिंदु जिनके स्थिति सदिश $10\hat{i} + 3\hat{j}$, $12\hat{j} - 5\hat{j}$ तथा $\lambda\hat{i} + 11\hat{j}$ हैं, सरेख हैं, तो λ का मान ज्ञात कीजिए ।

If the points with position vectors $10\hat{i} + 3\hat{j}$, $12\hat{i} - 5\hat{j}$ and $\lambda\hat{i} + 11\hat{j}$ are collinear, find the value of λ.

12. एक फर्म को प्रतिदिन कुछ बड़ी गाड़ियों तथा कुछ छोटी गाड़ियों द्वारा कम से कम 1200 पैकेज भेजने हैं जबकि बड़ी गाड़ी में 200 पैकेज तथा छोटी गाड़ी में 80 पैकेज आ सकते हैं । एक बड़ी गाड़ी का खर्च ₹ 400 तथा एक छोटी गाड़ी का खर्च ₹ 200 है । प्रतिदिन ₹ 3000 से अधिक खर्च नहीं किए जा सकते तथा इस कार्य पर लगाई गई बड़ी गाड़ियों की संख्या छोटी गाड़ियों की संख्या से अधिक नहीं हो सकती । उपरोक्त की रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाइए जबकि दिया है कि खर्च कम से कम होना है ।

A firm has to transport atleast 1200 packages daily using large vans which carry 200 packages each and small vans which can take 80 packages each. The cost for engaging each large van is ₹ 400 and each small van is ₹ 200. Not more than ₹ 3,000 is to be spent daily on the job and the number of large vans cannot exceed the number of small vans. Formulate this problem as a LPP given that the objective is to minimize cost.

खण्ड – स
SECTION – C

प्रश्न संख्या 13 से 23 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।

Question numbers **13** to **23** carry **4** marks each.

13. सिद्ध कीजिए : $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x, -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$

Prove that : $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x, -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$

14. यदि $\begin{vmatrix} a & b-y & c-z \\ a-x & b & c-z \\ a-x & b-y & c \end{vmatrix} = 0$ है तो सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ $x, y, z \neq 0$

अथवा

प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूह A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए ।

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

If $\begin{vmatrix} a & b-y & c-z \\ a-x & b & c-z \\ a-x & b-y & c \end{vmatrix} = 0$, then using properties of determinants, find the value of $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$, where x, y, z $\neq$ 0.

OR

Using elementary operations, find the inverse of the following matrix A

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

15. यदि x = a (cos θ + θ sin θ) तथा y = a (sin θ – θ cos θ) है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए ।

If x = a (cos θ + θ sin θ) and y = a (sin θ – θ cos θ), then find $\frac{d^2y}{dx^2}$.

16. वक्र y = cos (x + y), $-2\pi \leq x \leq 0$ की उस स्पर्श-रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा x + 2y = 0 के समांतर है ।

Find the equation of tangent to the curve y = cos (x + y), $-2\pi \leq x \leq 0$, that is parallel to the line x + 2y = 0.

17. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x+5}{3x^2+13x-10}dx$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}dx$

Find : $\int \frac{x+5}{3x^2+13x-10}dx$

OR

Evaluate : $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}dx$

18. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x^2dx}{(x-1)(x^2+1)}$

Find : $\int \frac{x^2dx}{(x-1)(x^2+1)}$

19. निम्न अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

$$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$$

Find the general solution of the following differential equation :

$$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$$

20. यदि चार बिंदु A, B, C तथा D जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $4\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$, $5\hat{i} + x\hat{j} + 7\hat{k}$, $5\hat{i} + 3\hat{j}$ और $7\hat{i} + 6\hat{j} + \hat{k}$ हैं, सहतलीय हैं, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

If four points A, B, C and D with position vectors $4\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$, $5\hat{i} + x\hat{j} + 7\hat{k}$, $5\hat{i} + 3\hat{j}$ and $7\hat{i} + 6\hat{j} + \hat{k}$ respectively are coplanar, then find the value of x.

21. p का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएँ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{1}$ तथा $\frac{7-7x}{3p} = \frac{5-y}{1} = \frac{11-z}{7}$ परस्पर लंब हों ।

अथवा

तलों $x + y + z = 1$ और $2x + 3y + 4z = 5$ की प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाने वाले उस तल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके y-अंत:खण्ड का दुगुना उसके z –अंत:खण्ड के तिगुने के समान हो ।

Find the value of p so that the lines

$$\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{1} \text{ and } \frac{7-7x}{3p} = \frac{5-y}{1} = \frac{11-z}{7}$$

are at right angles

OR

Find the equation of the plane through the line of intersection of the planes $x + y + z = 1$ and $2x + 3y + 4z = 5$ and twice of its y-intercept is equal to three times its z-intercept.

22. निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को ग्राफ द्वारा हल कीजिए :

न्यूनतमीकरण कीजिए : $z = 6x + 3y$

निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत : $\begin{cases} 4x + y \geq 80 \\ x + 5y \geq 115 \\ 3x + 2y \leq 150 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

Solve the following Linear Programming problem graphically :

Minimize : $z = 6x + 3y$

Subject to the constraints : $\begin{cases} 4x + y \geq 80 \\ x + 5y \geq 115 \\ 3x + 2y \leq 150 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

23. एक कक्षा के 60 छात्रों में तीन प्रकार की श्रेणियों के छात्र हैं ।

A : कठिन परिश्रम करने वाले ।

B : नियमित परन्तु कम परिश्रमी ।

C : लापरवाह तथा अनियमित ।

10 छात्र श्रेणी A में, 30 श्रेणी B में तथा अन्य श्रेणी C में हैं । यह पाया गया कि श्रेणी A के छात्रों के वार्षिक परीक्षा में अच्छे अंक न ले पाने की प्रायिकता 0.002 है जबकि श्रेणी B के छात्रों की यह प्रायिकता 0.02 तथा श्रेणी C के छात्रों की यह प्रायिकता 0.20 है । कक्षा का एक छात्र यादृच्छया चुने जाने पर, अच्छे अंक न ले पाने वाला पाया गया । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह छात्र श्रेणी C का है । श्रेणी C के छात्रों में किन मूल्यों के विकास की आवश्यकता है ?

There are three categories of students in a class of 60 students :

A : Very hard working students

B : Regular but not so hard working

C : Careless and irregular

10 students are in category A, 30 in category B and rest in category C. It is found that probability of students of category A, unable to get good marks in the final year examination is, 0.002, of category B it is 0.02 and of category C, this probability is 0.20. A student selected at random was found to be the one who could not get good marks in the examination. Find the probability that this student is of category C. What values need to be developed in students of category C ?

खण्ड – द

SECTION – D

प्रश्न संख्या 24 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Question numbers **24** to **29** carry **6** marks each.

24. माना $f(x) = \dfrac{4x}{3x+4}$ द्वारा परिभाषित एक फलन $f : \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\} \to \mathbb{R}$ है । दर्शाइए कि $f : \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\} \to$ Range of f (f का परिसर) में एकैकी तथा आच्छादक है । अत: परिसर $f \to \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$ में f^{-1} ज्ञात कीजिए ।

अथवा

माना $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ है तथा $*$ A में $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ द्वारा परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है । सिद्ध कीजिए कि $*$ क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है । A में $*$ का तत्समक अवयव, यदि कोई है, तो ज्ञात कीजिए ।

Let $f : \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\} \to \mathbb{R}$ be a function defined as $f(x) = \dfrac{4x}{3x+4}$. Show that, in $f : \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\} \to$ Range of f, f is one-one and onto. Hence find f^{-1}. Range $f \to \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$.

OR

Let $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ and $*$ be the binary operation on A defined by $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$. Show that $*$ is commutative and associative. Find the identity element for $*$ on A, if any.

25. आव्यूह A ज्ञात कीजिए, यदि : $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$

Find matrix A, if $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$

26. वह अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi$ द्वारा प्रदत्त फलन f निरंतर वर्धमान या निरंतर ह्रासमान है ।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि अर्द्धशीर्ष कोण α और ऊँचाई h के लंब वृत्तीय शंकु के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई, शंकु की ऊँचाई की एक तिहाई है । अत:बेलन का अधिकतम आयतन भी ज्ञात कीजिए ।

Find the intervals in which the function f given by
$f(x) = \sin x + \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi$
is strictly increasing or strictly decreasing.

OR

Show that height of the cylinder of greatest volume which can be inscribed in a right circular cone of height h and semi-vertical angle α, is one-third that of the cone. Hence find the greatest volume of the cylinder.

27. समाकलन के प्रयोग से क्षेत्र $\{(x, y) : y^2 \leq 4x, 4x^2 + 4y^2 \leq 9\}$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Using integration find the area of the region $\{(x, y) : y^2 \leq 4x, 4x^2 + 4y^2 \leq 9\}$.

28. रेखाओं $\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$ तथा $\frac{x-38}{3} = \frac{y+29}{8} = \frac{z-5}{-5}$ को अंतर्विष्ट करने वाले तल का समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the equation of plane containing the lines $\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$ and $\frac{x-38}{3} = \frac{y+29}{8} = \frac{z-5}{-5}$.

29. यदि एक न्याय्य सिक्के को 8 बार उछाला गया तो निम्न की प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए :
(i) ठीक 5 चित
(ii) न्यूनतम 6 चित
(iii) अधिकतम 6 चित

अथवा

ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से तीन पत्ते उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना सहित निकाले जाते हैं । लाल रंग के पत्तों की संख्या का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए ।

A fair coin is tossed 8 times, find the probability of
(i) exactly 5 heads
(ii) at least six heads
(iii) at most six heads

OR

Three cards are drawn successively with replacement from a well shuffled pack of 52 cards. Find the mean and variance of the number of red cards.

SET – 2

Series : GBM/1/C

कोड नं.
Code No. 65/1/2

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।
Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **8** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **8** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे — *अधिकतम अंक : **100***

*Time allowed : **3** hours* — *Maximum Marks : **100***

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न पत्र में **29** प्रश्न हैं जो चार खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब, स तथा द । खण्ड अ में **4** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **एक अंक** का है । खण्ड ब में **8** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **दो अंक** का है । खण्ड स में **11** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **चार अंक** का है । खण्ड द में **6** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **छः अंक** का है ।*

(iii) *खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकतानुसार दिए जा सकते हैं ।*

(iv) *पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले **3** प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले **3** प्रश्नों में आंतरिक विकल्प हैं । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।*

(v) *कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है । यदि आवश्यक हो, तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं ।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *This question paper consists of* ***29*** *questions divided into four sections* ***A, B, C*** *and* ***D****. Section* ***A*** *comprises of* ***4*** *questions of* ***one*** *mark each, Section* ***B*** *comprises of* ***8*** *questions of* ***two*** *marks each, Section* ***C*** *comprises of* ***11*** *questions of* ***four*** *marks each and Section* ***D*** *comprises of* ***6*** *questions of* ***six*** *marks each.*

(iii) *All questions in Section* ***A*** *are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*

(iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in* ***3*** *questions of* ***four*** *marks each and* ***3*** *questions of* ***six*** *marks each. You have to attempt only* ***one*** *of the alternatives in all such questions.*

(v) *Use of calculators is* ***not*** *permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.*

खण्ड – अ

SECTION – A

प्रश्न संख्या **1** से **4** तक प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है ।

Question numbers **1** to **4** carry **1** mark each.

1.. वक्र $y = \sin x$ के बिंदु (0, 0) पर खींची गई स्पर्श–रेखा का समीकरण लिखिए ।

Write the equation of tangent drawn to the curve $y = \sin x$ at the point (0, 0).

2.. सदिशों $\vec{a} \times \vec{b}$ तथा $\vec{b} \times \vec{a}$ के बीच का कोण लिखिए ।

Write the angle between the vectors $\vec{a} \times \vec{b}$ and $\vec{b} \times \vec{a}$.

3. माना A तथा B क्रमश: कोटि 3×2 तथा 2×4 के आव्यूह हैं तो आव्यूह (AB) की कोटि लिखिए ।

Let A and B are matrices of order 3×2 and 2×4 respectively. Write the order of matrix (AB).

4. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{1}{x(1 + \log x)}\, dx$

Find : $\int \frac{1}{x(1 + \log x)}\, dx$

खण्ड – ब

SECTION – B

प्रश्न संख्या **5** से **12** तक प्रत्येक प्रश्न के **2** अंक हैं ।

Question numbers **5** to **12** carry **2** marks each.

5. वक्रों $y^2 = 4ax$ के कुलों का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए ।

   Find the differential equation of the family of curves $y^2 = 4\,ax$.

6. एक फर्म को प्रतिदिन कुछ बड़ी गाड़ियों तथा कुछ छोटी गाड़ियों द्वारा कम से कम 1200 पैकेज भेजने हैं जबकि बड़ी गाड़ी में 200 पैकेज तथा छोटी गाड़ी में 80 पैकेज आ सकते हैं । एक बड़ी गाड़ी का खर्च ₹ 400 तथा एक छोटी गाड़ी का खर्च ₹ 200 है । प्रतिदिन ₹ 3000 से अधिक खर्च नहीं किए जा सकते तथा इस कार्य पर लगाई गई बड़ी गाड़ियों की संख्या छोटी गाड़ियों की संख्या से अधिक नहीं हो सकती । उपरोक्त की रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाइए जबकि दिया है कि खर्च कम से कम होना है ।

   A firm has to transport atleast 1200 packages daily using large vans which carry 200 packages each and small vans which can take 80 packages each. The cost for engaging each large van is ₹ 400 and each small van is ₹ 200. Not more than ₹ 3,000 is to be spent daily on the job and the number of large vans cannot exceed the number of small vans. Formulate this problem as a LPP given that the objective is to minimize cost.

7. निम्न आव्यूह समीकरण में प्रारंभिक संक्रिया $R_2 \to R_2 + R_1$ का प्रयोग करने के पश्चात प्राप्त समीकरण लिखिए :

   $$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$$

   In the following matrix equation use elementary operation $R_2 \to R_2 + R_1$ and write the equation thus obtained.

   $$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$$

8. . अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

   Find the general solution of the differential equation

   $$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$$

9. एक लंबवृत्तीय शंकु की त्रिज्या r, 3 सेमी/मिनट की दर से घट रही है और ऊँचाई h, 2 सेमी/मिनट की दर से बढ़ रही है । जब r = 9 सेमी और h = 6 सेमी है, तब शंकु के आयतन में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए ।

   The radius r of a right circular cone is decreasing at the rate of 3 cm/minute and the height h is increasing at the rate of 2 cm/minute. When r = 9 cm and h = 6 cm, find the rate of change of its volume.

10. बिंदुओं A, B तथा C के स्थिति सदिश क्रमश: $\lambda\hat{i} + 3\hat{j}$, $12\hat{i} + \mu\hat{j}$ तथा $11\hat{i} - 3\hat{j}$ हैं । यदि बिंदु C, बिंदुओं A तथा B को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 3:1 में बाँटता है तो λ तथा μ के मान ज्ञात कीजिए ।

The position vectors of points A, B and C are $\lambda\hat{i} + 3\hat{j}$, $12\hat{i} + \mu\hat{j}$ and $11\hat{i} - 3\hat{j}$ respectively. If C divides the line segment joining A and B in the ratio 3 : 1, find the values of λ and μ.

11. ज्ञात कीजिए : $\int\sqrt{2x - x^2}\,dx$

Find : $\int\sqrt{2x - x^2}\,dx$

12. p का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए फलन $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}, & x \neq 0 \\ p, & x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ पर संतत हो ।

Find the value of p for which the function

$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}, & x \neq 0 \\ p, & x = 0 \end{cases}$

is continuous at $x = 0$.

खण्ड – स

SECTION – C

प्रश्न संख्या **13** से **23** तक प्रत्येक प्रश्न के **4** अंक हैं ।

Question numbers **13** to **23** carry **4** marks each.

13. ज्ञात कीजिए : $\int\frac{x^2\,dx}{(x-1)(x^2+1)}$

Find : $\int\frac{x^2\,dx}{(x-1)(x^2+1)}$

14. यदि चार बिंदु A, B, C तथा D जिनके स्थिति सदिश क्रमश:
$4\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$, $5\hat{i} + x\hat{j} + 7\hat{k}$, $5\hat{i} + 3\hat{j}$ और $7\hat{i} + 6\hat{j} + \hat{k}$ हैं, सहतलीय हैं, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

If four points A, B, C and D with position vectors $4\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$, $5\hat{i} + x\hat{j} + 7\hat{k}$, $5\hat{i} + 3\hat{j}$ and $7\hat{i} + 6\hat{j} + \hat{k}$ respectively are coplanar, then find the value of x.

15. निम्न अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

$$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$$

Find the general solution of the following differential equation :

$$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$$

16. सिद्ध कीजिए : $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x, -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$

Prove that : $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x, -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$

17. यदि $\begin{vmatrix} a & b-y & c-z \\ a-x & b & c-z \\ a-x & b-y & c \end{vmatrix} = 0$ है तो सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ $x, y, z \neq 0$

अथवा

प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूह A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए ।

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

If $\begin{vmatrix} a & b-y & c-z \\ a-x & b & c-z \\ a-x & b-y & c \end{vmatrix} = 0$, then using properties of determinants, find the value of $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$, where x, y, z $\neq 0$.

OR

Using elementary operations, find the inverse of the following matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

18. वक्र y = cos (x + y), $-2\pi \le x \le 0$ की उस स्पर्श-रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x + 2y = 0$ के समांतर है ।

Find the equation of tangent to the curve y = cos (x + y), $-2\pi \le x \le 0$, that is parallel to the line $x + 2y = 0$.

19. p का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएँ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{1}$ तथा $\frac{7-7x}{3p} = \frac{5-y}{1} = \frac{11-z}{7}$ परस्पर लंब हों ।

अथवा

तलों $x + y + z = 1$ और $2x + 3y + 4z = 5$ की प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाने वाले उस तल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके y-अंत:खण्ड का दुगुना उसके z –अंत:खण्ड के तिगुने के समान हो ।

Find the value of p so that the lines

$\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{1}$ and $\frac{7-7x}{3p} = \frac{5-y}{1} = \frac{11-z}{7}$

are at right angles

OR

Find the equation of the plane through the line of intersection of the planes $x + y + z = 1$ and $2x + 3y + 4z = 5$ and twice of its y-intercept is equal to three times its z-intercept.

20. निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को ग्राफ द्वारा हल कीजिए :

अधिकतमीकरण कीजिए : $z = 8000x + 12000y$

निम्न अवरोधों के अंतर्गत : $\begin{cases} 3x + 4y \le 60 \\ x + 3y \le 30 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

Solve the following Linear Programming problem graphically :

Maximise : $z = 8000x + 12000\,y$

Subject to the constraints : $\begin{cases} 3x + 4y \le 60 \\ x + 3y \le 30 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

21. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x+7}{3x^2 + 25x + 28} dx$

Find : $\int \frac{x+7}{3x^2 + 25x + 28} dx$

22. यदि $x = 3 \cos t - 2 \cos^3 t$ तथा $y = 3 \sin t - 2 \sin^3 t$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए ।

If $x = 3 \cos t - 2 \cos^3 t$ and $y = 3 \sin t - 2 \sin^3 t$ then find $\frac{d^2y}{dx^2}$.

23. एक कक्षा के 60 छात्रों में तीन प्रकार की श्रेणियों के छात्र हैं ।

A : कठिन परिश्रम करने वाले ।

B : नियमित परन्तु कम परिश्रमी ।

C : लापरवाह तथा अनियमित ।

10 छात्र श्रेणी A में, 30 श्रेणी B में तथा अन्य श्रेणी C में हैं । यह पाया गया कि श्रेणी A के छात्रों के वार्षिक परीक्षा में अच्छे अंक न ले पाने की प्रायिकता 0.002 है जबकि श्रेणी B के छात्रों की यह प्रायिकता 0.02 तथा श्रेणी C के छात्रों की यह प्रायिकता 0.20 है । कक्षा का एक छात्र यादृच्छया चुने जाने पर, अच्छे अंक न ले पाने वाला पाया गया । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह छात्र श्रेणी C का है । श्रेणी C के छात्रों में किन मूल्यों के विकास की आवश्यकता है ?

There are three categories of students in a class of 60 students :

A : Very hard working students

B : Regular but not so hard working

C : Careless and irregular

10 students are in category A, 30 in category B and rest in category C. It is found that probability of students of category A, unable to get good marks in the final year examination is, 0.002, of category B it is 0.02 and of category C, this probability is 0.20. A student selected at random was found to be the one who could not get good marks in the examination. Find the probability that this student is of category C. What values need to be developed in students of category C ?

खण्ड – द
SECTION – D

प्रश्न संख्या **24** से **29** तक प्रत्येक प्रश्न के **6** अंक हैं ।

Question numbers **24** to **29** carry **6** marks each.

24. . वह अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$ द्वारा प्रदत्त फलन f निरंतर वर्धमान या निरंतर ह्रासमान है ।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि अर्द्धशीर्ष कोण α और ऊँचाई h के लंब वृत्तीय शंकु के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई, शंकु की ऊँचाई की एक तिहाई है । अत:बेलन का अधिकतम आयतन भी ज्ञात कीजिए ।

Find the intervals in which the function f given by
$f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$
is strictly increasing or strictly decreasing.

OR

Show that height of the cylinder of greatest volume which can be inscribed in a right circular cone of height h and semi-vertical angle α, is one-third that of the cone. Hence find the greatest volume of the cylinder.

25. समाकलन के प्रयोग से क्षेत्र $\{(x, y) : y^2 \le 4x, 4x^2 + 4y^2 \le 9\}$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Using integration find the area of the region $\{(x, y) : y^2 \le 4x, 4x^2 + 4y^2 \le 9\}$.

26. यदि एक न्याय्य सिक्के को 8 बार उछाला गया तो निम्न की प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए :
(i) ठीक 5 चित
(ii) न्यूनतम 6 चित
(iii) अधिकतम 6 चित

अथवा

ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से तीन पत्ते उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना सहित निकाले जाते हैं । लाल रंग के पत्तों की संख्या का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए ।

A fair coin is tossed 8 times, find the probability of
(i) exactly 5 heads
(ii) at least six heads
(iii) at most six heads

OR

Three cards are drawn successively with replacement from a well shuffled pack of 52 cards. Find the mean and variance of the number of red cards.

27. माना $f(x) = \dfrac{4x}{3x+4}$ द्वारा परिभाषित एक फलन $f : \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\} \to \mathbb{R}$ है । दर्शाइए कि $f : \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\} \to$ Range of f (f का परिसर) में एकैकी तथा आच्छादक है । अत: परिसर $f \to \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$ में f^{-1} ज्ञात कीजिए ।

अथवा

माना $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ है तथा $*$ A में $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ द्वारा परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है । सिद्ध कीजिए कि $*$ क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है । A में $*$ का तत्समक अवयव, यदि कोई है, तो ज्ञात कीजिए ।

Let $f : \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\} \to \mathbb{R}$ be a function defined as $f(x) = \dfrac{4x}{3x+4}$. Show that, in $f : \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\} \to$ Range of f, f is one-one and onto. Hence find f^{-1}. Range $f \to \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$.

OR

Let $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ and $*$ be the binary operation on A defined by $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$. Show that $*$ is commutative and associative. Find the identity element for $*$ on A, if any.

28. आव्यूह X ज्ञात कीजिए यदि : $X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 11 & 10 & 9 \end{pmatrix}$

Find matrix X if : $X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 11 & 10 & 9 \end{pmatrix}$

29. दर्शाइए कि रेखाएँ $\dfrac{x+3}{-3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-5}{5}$ तथा $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-5}{5}$ सह-तलीय है । अत: इन रेखाओं को अंतर्विष्ट करने वाले तल का समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Show that the lines $\dfrac{x+3}{-3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-5}{5}$ and $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-5}{5}$ are coplanar. Hence find the equation of the plane containing these lines.

SET – 3

Series : GBM/1/C

कोड नं.
Code No. **65/1/3**

रोल नं.
Roll No. | | | | | | | |

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।
Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न–पत्र में मुद्रित पृष्ठ **8** हैं ।
- प्रश्न–पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर–पुस्तिका के मुख–पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न–पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न–पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न–पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न–पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर–पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **8** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : **100***

*Time allowed : **3** hours* *Maximum Marks : **100***

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न पत्र में **29** प्रश्न हैं जो चार खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब, स तथा द । खण्ड अ में **4** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **एक अंक** का है । खण्ड ब में **8** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **दो अंक** का है । खण्ड स में **11** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **चार अंक** का है । खण्ड द में **6** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **छः अंक** का है ।*

(iii) *खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकतानुसार दिए जा सकते हैं ।*

(iv) *पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले **3** प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले **3** प्रश्नों में आंतरिक विकल्प हैं । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।*

(v) *कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है । यदि आवश्यक हो, तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं ।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *This question paper consists of* ***29*** *questions divided into four sections* ***A, B, C*** *and* ***D****. Section* ***A*** *comprises of* ***4*** *questions of* ***one*** *mark each, Section* ***B*** *comprises of* ***8*** *questions of* ***two*** *marks each, Section* ***C*** *comprises of* ***11*** *questions of* ***four*** *marks each and Section* ***D*** *comprises of* ***6*** *questions of* ***six*** *marks each.*

(iii) *All questions in Section* ***A*** *are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*

(iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in* ***3*** *questions of* ***four*** *marks each and* ***3*** *questions of* ***six*** *marks each. You have to attempt only* ***one*** *of the alternatives in all such questions.*

(v) *Use of calculators is* ***not*** *permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.*

खण्ड – अ

SECTION – A

प्रश्न संख्या **1** से **4** तक प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है ।

Question numbers **1** to **4** carry **1** mark each.

1. सदिशों $\vec{a} \times \vec{b}$ तथा $\vec{b} \times \vec{a}$ के बीच का कोण लिखिए ।

Write the angle between the vectors $\vec{a} \times \vec{b}$ and $\vec{b} \times \vec{a}$.

2. माना A तथा B क्रमश: कोटि 3×2 तथा 2×4 के आव्यूह हैं तो आव्यूह (AB) की कोटि लिखिए ।

Let A and B are matrices of order 3×2 and 2×4 respectively. Write the order of matrix (AB).

3. वक्र $y = \sin x$ के बिंदु (0, 0) पर खींची गई स्पर्श-रेखा का समीकरण लिखिए ।

Write the equation of tangent drawn to the curve $y = \sin x$ at the point (0, 0).

4. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{1}{x(1 + \log x)}\, dx$

Find : $\int \frac{1}{x(1 + \log x)}\, dx$

खण्ड – ब

SECTION – B

प्रश्न संख्या **5** से **12** तक प्रत्येक प्रश्न के **2** अंक हैं ।
Question numbers **5** to **12** carry **2** marks each.

5. यदि बिंदु जिनके स्थिति सदिश $10\hat{i} + 3\hat{j}$, $12\hat{j} - 5\hat{j}$ तथा $\lambda\hat{i} + 11\hat{j}$ हैं, सरेख हैं, तो λ का मान ज्ञात कीजिए ।

If the points with position vectors $10\hat{i} + 3\hat{j}$, $12\hat{i} - 5\hat{j}$ and $\lambda\hat{i} + 11\hat{j}$ are collinear, find the value of λ.

6. एक फर्म को प्रतिदिन कुछ बड़ी गाड़ियों तथा कुछ छोटी गाड़ियों द्वारा कम से कम 1200 पैकेज भेजने हैं जबकि बड़ी गाड़ी में 200 पैकेज तथा छोटी गाड़ी में 80 पैकेज आ सकते हैं । एक बड़ी गाड़ी का खर्च ₹ 400 तथा एक छोटी गाड़ी का खर्च ₹ 200 है । प्रतिदिन ₹ 3000 से अधिक खर्च नहीं किए जा सकते तथा इस कार्य पर लगाई गई बड़ी गाड़ियों की संख्या छोटी गाड़ियों की संख्या से अधिक नहीं हो सकती । उपरोक्त की रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाइए जबकि दिया है कि खर्च कम से कम होना है ।

A firm has to transport atleast 1200 packages daily using large vans which carry 200 packages each and small vans which can take 80 packages each. The cost for engaging each large van is ₹ 400 and each small van is ₹ 200. Not more than ₹ 3,000 is to be spent daily on the job and the number of large vans cannot exceed the number of small vans. Formulate this problem as a LPP given that the objective is to minimize cost.

7. निम्न आव्यूह समीकरण में प्रारंभिक संक्रिया $R_2 \to R_2 + R_1$ का प्रयोग करने के पश्चात प्राप्त समीकरण लिखिए :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$$

In the following matrix equation use elementary operation $R_2 \to R_2 + R_1$ and write the equation thus obtained.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$$

8. एक लंबवृत्तीय शंकु की त्रिज्या r, 3 सेमी/मिनट की दर से घट रही है और ऊँचाई h, 2 सेमी/मिनट की दर से बढ़ रही है । जब $r = 9$ सेमी और $h = 6$ सेमी है, तब शंकु के आयतन में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए ।

The radius r of a right circular cone is decreasing at the rate of 3 cm/minute and the height h is increasing at the rate of 2 cm/minute. When $r = 9$ cm and $h = 6$ cm, find the rate of change of its volume.

9. वक्रों $y^2 = 4ax$ के कुलों का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the differential equation of the family of curves $y^2 = 4\,ax$.

10. k का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए फलन $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x-\cos x}{4x-\pi}, & x\neq\dfrac{\pi}{4}\\ k, & x=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

$x=\dfrac{\pi}{4}$ पर संतत हो ।

Find the value of k for which the function $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x-\cos x}{4x-\pi}, & x\neq\dfrac{\pi}{4}\\ k, & x=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

is continuous at $x=\dfrac{\pi}{4}$.

11. ज्ञात कीजिए : $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}dx$

Find : $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}dx$

12. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए ।

Find the general solution of the differential equation $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x$.

खण्ड – स

SECTION – C

प्रश्न संख्या **13** से **23** तक प्रत्येक प्रश्न के **4** अंक हैं ।

Question numbers **13** to **23** carry **4** marks each.

13. यदि $x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta)$ तथा $y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta)$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए ।

If $x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta)$ and $y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta)$, then find $\frac{d^2y}{dx^2}$.

14. वक्र $y=\cos(x+y)$, $-2\pi\leq x\leq 0$ की उस स्पर्श-रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x+2y=0$ के समांतर है ।

Find the equation of tangent to the curve $y=\cos(x+y)$, $-2\pi\leq x\leq 0$, that is parallel to the line $x+2y=0$.

15. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x^2+1)}$

Find : $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x^2+1)}$

16. निम्न अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

$x \cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$

Find the general solution of the following differential equation :

$x \cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$

17. यदि चार बिंदु A, B, C तथा D जिनके स्थिति सदिश क्रमश: $4\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$, $5\hat{i} + x\hat{j} + 7\hat{k}$, $5\hat{i} + 3\hat{j}$ और $7\hat{i} + 6\hat{j} + \hat{k}$ हैं, सहतलीय हैं, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

If four points A, B, C and D with position vectors $4\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$, $5\hat{i} + x\hat{j} + 7\hat{k}$, $5\hat{i} + 3\hat{j}$ and $7\hat{i} + 6\hat{j} + \hat{k}$ respectively are coplanar, then find the value of x.

18. p का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएँ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{1}$ तथा $\frac{7-7x}{3p} = \frac{5-y}{1} = \frac{11-z}{7}$ परस्पर लंब हों ।

अथवा

तलों $x + y + z = 1$ और $2x + 3y + 4z = 5$ की प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाने वाले उस तल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके y-अंत:खण्ड का दुगुना उसके z –अंत:खण्ड के तिगुने के समान हो ।

Find the value of p so that the lines

$\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{1}$ and $\frac{7-7x}{3p} = \frac{5-y}{1} = \frac{11-z}{7}$

are at right angles

OR

Find the equation of the plane through the line of intersection of the planes $x + y + z = 1$ and $2x + 3y + 4z = 5$ and twice of its y-intercept is equal to three times its z-intercept.

19. यदि $\begin{vmatrix} a & b-y & c-z \\ a-x & b & c-z \\ a-x & b-y & c \end{vmatrix} = 0$ है तो सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ $x, y, z \neq 0$

अथवा

प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूह A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए ।

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

If $\begin{vmatrix} a & b-y & c-z \\ a-x & b & c-z \\ a-x & b-y & c \end{vmatrix} = 0$, then using properties of determinants, find the value of $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$, where x, y, z $\neq$ 0.

OR

Using elementary operations, find the inverse of the following matrix A

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

20. आलेख द्वारा, निम्न अवरोधों के अंतर्गत $z = 105x + 90y$ का अधिकतमीकरण कीजिए :

$x + y \leq 50, 2x + y \leq 80, x \geq 0, y \geq 0$

Maximize $z = 105x + 90y$ graphically under the following constraints :

$x + y \leq 50, 2x + y \leq 80, x \geq 0, y \geq 0$

21. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x+x^2}} dx$

Find : $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x+x^2}} dx$

22. सिद्ध कीजिए कि : $\cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right] = \frac{x}{2}, x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

Prove that : $\cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right] = \frac{x}{2}, x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

23. एक कक्षा के 60 छात्रों में तीन प्रकार की श्रेणियों के छात्र हैं ।

A : कठिन परिश्रम करने वाले ।

B : नियमित परन्तु कम परिश्रमी ।

C : लापरवाह तथा अनियमित ।

10 छात्र श्रेणी A में, 30 श्रेणी B में तथा अन्य श्रेणी C में हैं । यह पाया गया कि श्रेणी A के छात्रों के वार्षिक परीक्षा में अच्छे अंक न ले पाने की प्रायिकता 0.002 है जबकि श्रेणी B के छात्रों की यह प्रायिकता 0.02 तथा श्रेणी C के छात्रों की यह प्रायिकता 0.20 है । कक्षा का एक छात्र यादृच्छया चुने जाने पर, अच्छे अंक न ले पाने वाला पाया गया । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह छात्र श्रेणी C का है । श्रेणी C के छात्रों में किन मूल्यों के विकास की आवश्यकता है ?

There are three categories of students in a class of 60 students :

A : Very hard working students

B : Regular but not so hard working

C : Careless and irregular

10 students are in category A, 30 in category B and rest in category C. It is found that probability of students of category A, unable to get good marks in the final year examination is, 0.002, of category B it is 0.02 and of category C, this probability is 0.20. A student selected at random was found to be the one who could not get good marks in the examination. Find the probability that this student is of category C. What values need to be developed in students of category C ?

खण्ड – द
SECTION – D

प्रश्न संख्या **24** से **29** तक प्रत्येक प्रश्न के **6** अंक हैं ।

Question numbers **24** to **29** carry **6** marks each.

24. वह अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x,\ 0 \le x \le 2\pi$ द्वारा प्रदत्त फलन f निरंतर वर्धमान या निरंतर ह्रासमान है ।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि अर्द्धशीर्ष कोण α और ऊँचाई h के लंब वृत्तीय शंकु के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई, शंकु की ऊँचाई की एक तिहाई है । अत:बेलन का अधिकतम आयतन भी ज्ञात कीजिए ।

Find the intervals in which the function f given by
$f(x) = \sin x + \cos x,\ 0 \le x \le 2\pi$
is strictly increasing or strictly decreasing.

OR

Show that height of the cylinder of greatest volume which can be inscribed in a right circular cone of height h and semi-vertical angle α, is one-third that of the cone. Hence find the greatest volume of the cylinder.

25. यदि एक न्याय्य सिक्के को 8 बार उछाला गया तो निम्न की प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए :
(i) ठीक 5 चित
(ii) न्यूनतम 6 चित
(iii) अधिकतम 6 चित

अथवा

ताश के 52 पत्तों की एक भली–भाँति फेंटी गई गड्डी में से तीन पत्ते उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना सहित निकाले जाते हैं । लाल रंग के पत्तों की संख्या का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए ।

A fair coin is tossed 8 times, find the probability of
(i) exactly 5 heads
(ii) at least six heads
(iii) at most six heads

OR

Three cards are drawn successively with replacement from a well shuffled pack of 52 cards. Find the mean and variance of the number of red cards.

26. माना $f(x) = \dfrac{4x}{3x+4}$ द्वारा परिभाषित एक फलन $f : \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\} \to \mathbb{R}$ है । दर्शाइए कि $f : \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\} \to$ Range of f (f का परिसर) में एकैकी तथा आच्छादक है । अत: परिसर $f \to \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$ में f^{-1} ज्ञात कीजिए ।

अथवा

माना $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ है तथा $*$ A में $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ द्वारा परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है । सिद्ध कीजिए कि $*$ क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है । A में $*$ का तत्समक अवयव, यदि कोई है, तो ज्ञात कीजिए ।

Let $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \to \mathbb{R}$ be a function defined as $f(x) = \frac{4x}{3x+4}$. Show that, in $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \to$ Range of f, f is one-one and onto. Hence find f^{-1}. Range $f \to \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$.

OR

Let $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ and $*$ be the binary operation on A defined by $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$. Show that $*$ is commutative and associative. Find the identity element for $*$ on A, if any.

27. आव्यूह A ज्ञात कीजिए, यदि : $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$

Find matrix A, if $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$

28. समाकलन के प्रयोग से निम्न क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

$\{(x, y) : y^2 \geq ax, x^2 + y^2 \leq 2ax, a > 0\}$

Using Integration, find the area of the following region :

$\{(x, y) : y^2 \geq ax, x^2 + y^2 \leq 2ax, a > 0\}$

29. बिंदु (–1, 3, 2) से होकर जाने वाले तथा समतलों $x + 2y + 3z = 5$ और $3x + 3y + z = 0$ में से प्रत्येक पर लंब, समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the equation of the plane passing through the point (–1, 3, 2) and perpendicular to each of the planes $x + 2y + 3z = 5$ and $3x + 3y + z = 0$.

Strictly Confidential — (For Internal and Restricted Use Only)

Senior Secondary School Certificate Examination

July 2017 (Compartment)

Marking Scheme — Mathematics 65/1/1, 65/1/2, 65/1/3 [Delhi Region]

General Instructions:

1. The Marking Scheme provides general guidelines to reduce subjectivity in the marking. The answers given in the Marking Scheme are suggested answers. The content is thus indicative. If a student has given any other answer which is different from the one given in the Marking Scheme, but conveys the meaning, such answers should be given full weightage

2. Evaluation is to be done as per instructions provided in the marking scheme. It should not be done according to one's own interpretation or any other consideration — Marking Scheme should be strictly adhered to and religiously followed.

3. Alternative methods are accepted. Proportional marks are to be awarded.

4. If a candidate has attempted an extra question, marks obtained in the question attempted first should be retained and the other answer should be scored out.

5. A full scale of marks - 0 to 100 has to be used. Please do not hesitate to award full marks if the answer deserves it.

6. Separate Marking Scheme for all the three sets has been given.

7. As per orders of the Hon'ble Supreme Court. The candidates would now be permitted to obtain photocopy of the Answer book on request on payment of the prescribed fee. All examiners/Head Examiners are once again reminded that they must ensure that evaluation is carried out strictly as per value points for each answer as given in the Marking Scheme.

QUESTION PAPER CODE 65/1/1

EXPECTED ANSWER/VALUE POINTS

SECTION A

1. Order of AB is 3×4 1

2. $\frac{dy}{dx} = \cos x$ $\frac{1}{2}$

Slope of tangent at (0, 0) is 1

Equation of tangent is $y = x$ $\frac{1}{2}$

3. Putting $(1 + \log x)$ or $\log x = t$ $\frac{1}{2}$

$\log |1 + \log x| + C$ $\frac{1}{2}$

4. π 1

SECTION B

5. $R_2 \to R_2 + R_1$ implies

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 17 & -7 \end{pmatrix}$$ 1+1

1 mark for pre matrix on LHS and 1 mar for matrix on RHS

6. $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+5)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = k$$ 1

$\therefore \quad k = 7$ $\frac{1}{2}$

7. $\frac{dr}{dt} = -3$ cm/min, $\frac{dh}{dt} = 2$ cm/min $\frac{1}{2}$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left[r^2\frac{dh}{dt} + 2hr\frac{dr}{dt}\right] \quad 1$$

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{\text{at } r=9,\, h=6} = -54\pi \text{ cm}^3/\text{min} \quad \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Volume is decreasing at the rate 54π cm^3/min.

8. $I = \int \sqrt{(x-1)^2 - 1^2}\, dx$ 1

$$= \frac{(x-1)}{2}\sqrt{x^2 - 2x} - \frac{1}{2}\log\left|x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x}\right| + C \quad 1$$

9. Differentiating both sides w.r.t. x, we get

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a \quad 1$$

Eliminating 4a, we get

$$y^2 = 2y\frac{dy}{dx}\cdot x$$

or $2xy\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$ 1

10. Integrating factor is $e^{\int 2dx} = e^{2x}$ $\frac{1}{2}$

$\therefore$ Required solution is

$$y.e^{2x} = \int e^{3x}\cdot e^{2x}dx \quad \frac{1}{2}$$

$$y.e^{2x} = \frac{e^{5x}}{5} + C \quad 1$$

or $y = \frac{e^{3x}}{5} + Ce^{-2x}$

11. Let A be $10\hat{i}+3\hat{j}$, B be $12\hat{i}-5\hat{j}$, C be $\lambda\hat{i}+11\hat{j}$

$\overrightarrow{AB} = 2\hat{i}-8\hat{j}$ $\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{AC} = (\lambda-10)\hat{i}+8\hat{j}$ $\frac{1}{2}$

As $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AC}$ are collinear

$\frac{2}{\lambda-10} = \frac{-8}{8}$ $\frac{1}{2}$

So $\lambda = 8$ $\frac{1}{2}$

12. Let number of large vans = x

and number of small vans = y

Minimize cost z = 400x + 200y $\frac{1}{2}$

Subject to constraints

$$\left.\begin{array}{l} 200x + 80y \geq 1200 \text{ or } 5x + 2y \geq 30 \\ x \leq y \\ 400x + 200y \leq 3000 \text{ or } 2x + y \leq 15 \end{array}\right\}$$ $1\frac{1}{2}$

$x \geq 0,\ y \geq 0$

SECTION C

13. Putting $x = \cos\theta$ 1

LHS becomes

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\cos\theta}-\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\cos\theta/2-\sqrt{2}\sin\theta/2}{\sqrt{2}\cos\theta/2+\sqrt{2}\sin\theta/2}\right)$$ 1

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1-\tan\theta/2}{1+\tan\theta/2}\right)$$ 1

$$= \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$ $\frac{1}{2}$

$$= \frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}x = \text{RHS}$$ $\frac{1}{2}$

14. Taking x, y, z common from C_1, C_2, C_3 respectively, we get

$$xyz\begin{vmatrix} a/x & b/y-1 & c/z-1 \\ a/x-1 & b/y & c/z-1 \\ a/x-1 & b/y-1 & c/z \end{vmatrix} = 0$$ 1

$C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$

$$\begin{vmatrix} a/x+b/y+c/z-2 & b/y-1 & c/z-1 \\ a/x+b/y+c/z-2 & b/y & c/z-1 \\ a/x+b/y+c/z-2 & b/y-1 & c/z \end{vmatrix} = 0$$ 1

$$\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}-2\right)\begin{vmatrix} 1 & b/y-1 & c/z-1 \\ 1 & b/y & c/z-1 \\ 1 & b/y-1 & c/z \end{vmatrix} = 0$$ $\frac{1}{2}$

$R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1$

$$\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}-2\right)\begin{vmatrix} 1 & b/y-1 & c/z-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ 1

$\therefore \quad \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}-2\right)\cdot 1 = 0 \Rightarrow \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} = 2$ $\frac{1}{2}$

OR

We know that

$$IA = A \quad 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad 1$$

$R_2 \to \frac{R_2}{-5}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}$$

$R_1 \to R_1 - 2R_2$

$$\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}$$

Full marks for finding correct A^{-1} using column transformations with $AI = A$

15. $\frac{dx}{d\theta} = a(-\sin\theta + \theta\cos\theta + \sin\theta)$

$$= a\,\theta\cos\theta \quad 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a(\cos\theta - \cos\theta + \theta\sin\theta)$$

$$= a\,\theta\sin\theta \quad 1$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \tan\theta \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{\sec^3\theta}{a\theta} \quad 1$$

16. Differentiating $y = \cos(x + y)$ wrt x we get

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$$ 1

Slope of given line is $\frac{-1}{2}$ $\frac{1}{2}$

As tangent is parallel to line $x + 2y = 0$

$$\therefore \quad \frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)} = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(x+y) = 1$$

$$\Rightarrow \quad x + y = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}, n \in Z \qquad ...(1)$$ 1

Putting (1) in $y = \cos(x + y)$

we get $y = 0$

$$\Rightarrow \quad x = n\pi + (-1)^n \pi/2, n \in Z$$

$$x = \frac{-3\pi}{2} \in [-2\pi, 0]$$ $\frac{1}{2}$

$\therefore$ Required equation of tangent is

$$y = \frac{-1}{2}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

or $2y + x + \frac{3\pi}{2} = 0$ 1

17. Given integral $= \int \frac{x+5}{(x+5)(3x-2)} dx$ 2

$$= \int \frac{1}{3x-2} dx$$

$$= \frac{1}{3}\log|3x-2| + C$$ 2

OR

Let $I = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x + 4\sin^2 x} dx$

$= \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x}{1 + 4\tan^2 x} dx$ 1

Let $\tan x = t$, $\sec^2 x\, dx = dt$ $\frac{1}{2}$

$I = \int_0^1 \frac{1}{1+4t^2}\, dt$ 1

$= \frac{1}{2}\tan^{-1} 2t \Big|_0^1$ 1

$= \frac{1}{2}\tan^{-1} 2$ $\frac{1}{2}$

18. Let $\frac{x^2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ 1

$A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2}$

Thus integral becomes

$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$

$= \frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{4}\log|x^2+1| + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C$ $1\frac{1}{2}$

19. Given differential equation can be written as

$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos\frac{y}{x} + x}{x\cos\frac{y}{x}}$ ....(i) $\frac{1}{2}$

Clearly it is homogenous

Let $\frac{y}{x} = v$, $\frac{dy}{dx} = v + \frac{dv}{dx}$ 1

(1) becomes

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \sec v$$

$\Rightarrow \quad \cos v\, dv = \frac{dx}{x}$ 1

integrating both sides we get

$\sin v = \log|x| + C$ 1

$\sin\frac{y}{x} = \log|x| + C$ $\frac{1}{2}$

20. $\overrightarrow{AB} = \hat{i} + (x-3)\hat{j} + 4\hat{k}$

$\overrightarrow{AC} = \hat{i} - 3\hat{k}$

$\overrightarrow{AD} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ $1\frac{1}{2}$

As A, B, C & D are coplanar

$\therefore \quad \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}) = 0$

i.e. $\begin{vmatrix} 1 & x-3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$ $1\frac{1}{2}$

which gives

$x = 6$ 1

21. Given equation of lines can be written as

$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2p/7} = \frac{z-3}{1}$ ...(1) 1

$\frac{x-1}{-3p/7} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-11}{-7}$ ...(2) 1

(1) & (2) are perpendicular

So $-3\left(\frac{-3p}{7}\right) + \frac{2p}{7}(-1) + 1(-7) = 0$ 1

which gives $p = 7$ 1

OR

Required equation of plane is $x + y + z - 1 + \lambda(2x + 3y + 4z - 5) = 0$ for some λ. 1

i.e. $(1 + 2\lambda)x + (1 + 3\lambda)y + (1 + 4\lambda)z = 1 + 5\lambda$

according to question

$$2\left(\frac{1+5\lambda}{1+3\lambda}\right) = 3\left(\frac{1+5\lambda}{1+4\lambda}\right)$$ 1

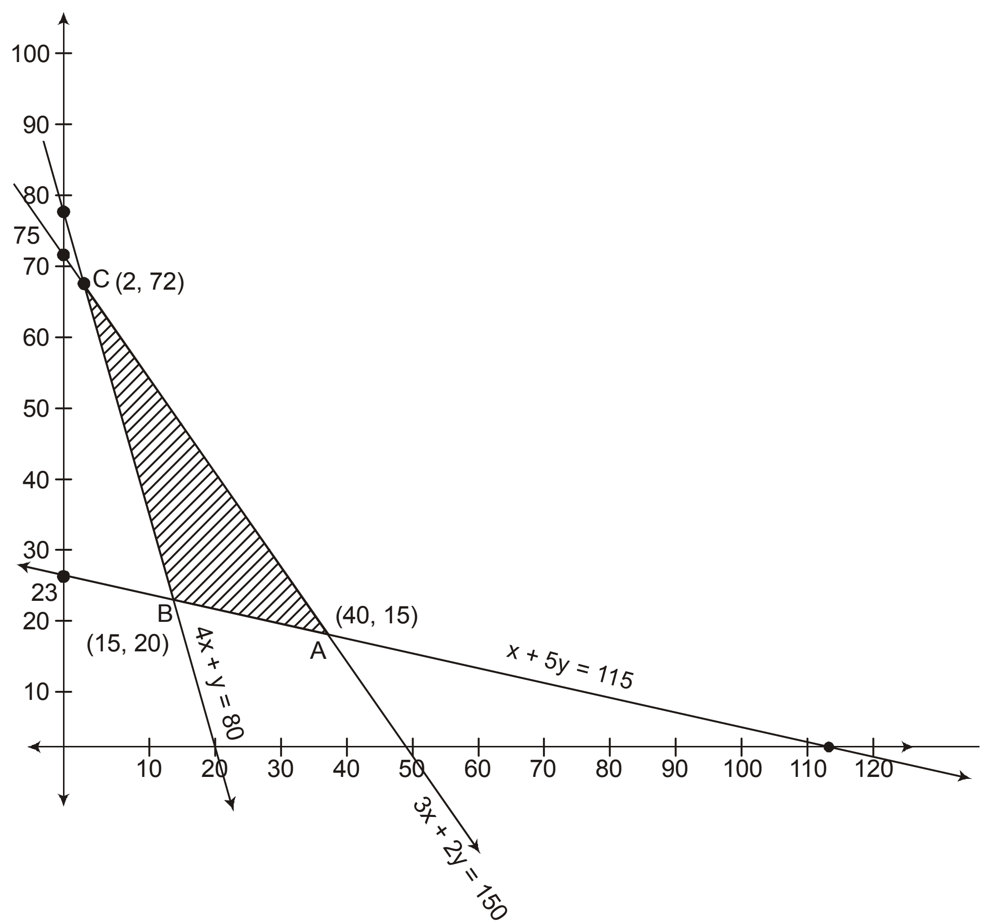
Solving we get $\lambda = -1$ 1

Thus the equation of required plane is

$-x - 2y - 3z = -4$

or $x + 2y + 3z = 4$ 1

22.



Correct lines $1\frac{1}{2}$

Correct shading 1

Corner points	Value of z	
A(40, 15)	285	
B(15, 20)	$150 \rightarrow$ minimum	1
C(2, 72)	228	

minimum $z = 150$

when $x = 15, y = 20$ $\frac{1}{2}$

23. E_1: Student selected from category A

E_2: Student selected from category B

E_3: Student selected from category C

S: Student could not get good marks

$$P(E_1) = \frac{1}{6} \quad P(E_2) = \frac{3}{6} \quad P(E_3) = \frac{2}{6}$$ 1

$P(S/E_1) = 0.002$ $P(S/E_2) = 0.02$, $P(S/E_3) = 0.2$

$$P(E_3/S) = \frac{P(E_3)\,P(S/E_3)}{P(E_1)\,P(S/E_1) + P(E_2)\,P(S/E_2) + P(E_3)\,P(S/E_3)}$$

$$= \frac{\frac{2}{6} \times 0.2}{\frac{1}{6} \times .002 + \frac{3}{6} \times .02 + \frac{2}{6} \times 0.2}$$ 1

$$= \frac{200}{231}$$ 1

Value: Hardwork and Regularity 1

SECTION D

24. For one-one

Let $x_1, x_2 \in R - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ such that

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4x_1}{3x_1+4} = \frac{4x_2}{3x_2+4}$$

$$\Rightarrow \quad 12\cancel{x_1}x_2 + 16x_1 = 12\cancel{x_1}x_2 + 16x_2$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

$\therefore$ f is one-one 3

Clearly f: $R - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \to$ Range f is onto 1

Let f(x) = y

i.e. $\frac{4x}{3x+4} = y$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{4y}{4-3y}$$ 1

So f^{-1}: Range $f \to R - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ is

$$f^{-1}(y) = \frac{4y}{4-3y}$$ 1

OR

(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)

(c, d) * (a, b) = (c + a, d + b)

(a, b) * (c, d) = (c, d) * (a, b)

$\therefore$ * is commutative 2

((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (a + c, b + d) * (e, f) = (a + c + e, b + d + f)

(a, b) * ((c, d) * (e, f)) = (a, b) * (c + e, d + f) = (a + c + e, b + d + f)

As $((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (a, b) * ((c, d) * (e, f))$

$\therefore$ $*$ is associative 2

Let (e_1, e_2) be identity

$(a, b) * (e_1, e_2) = (a, b)$

$(a + e_1, b + e_2) = (a, b)$

$e_1 = 0, e_2 = 0$

$(0, 0) \in R \times R$ is the identity element. 2

25. Clearly order of A is 2×3 1

Let $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ 1

So $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$

gives

$\left.\begin{array}{l} 2a - d = -1,\ 2b - e = -8,\ 2c - f = -10 \\ a = 1,\ b = -2,\ c = -5 \end{array}\right\}$ 2

$\Rightarrow$ $d = 3, e = 4, f = 0$ 1

Thus $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ 1

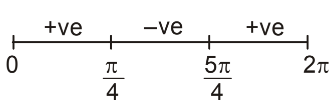
26. $f(x) = \sin x + \cos x \qquad 0 \le x \le 2\pi$

$f'(x) = \cos x - \sin x$ 1

$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x$ 1

$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ 1

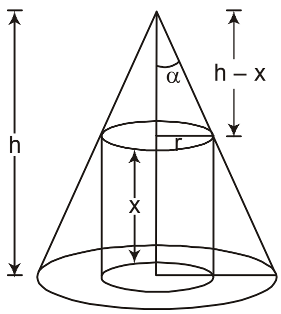
Sign of $f^1(x)$



2

So f(x) is strictly increasing in $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$ and strictly decreasing in $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ 1

OR



For Figure 1

$$\frac{r}{h-x} = \tan\alpha$$ 1

$$r = (h-x)\tan\alpha$$

Volume of cylinder

$$V = \pi r^2 x$$

$$V = \pi(h-x)^2 x \tan^2\alpha$$ $\frac{1}{2}$

$$\frac{dV}{dx} = \pi\tan^2 (h-x)(h-3x)$$

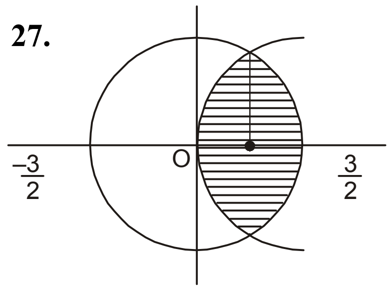
$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow h = x \text{ or } h = 3x$$

i.e. $x = \frac{h}{3}$ $1\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2V}{dx^2} = \pi\tan^2\alpha\,(6x-4h) \\ \therefore\ &\frac{d^2V}{dx^2} < 0 \quad \text{at} \quad x = \frac{h}{3} \\ \therefore\ &V \text{ is maximum at } x = \frac{h}{3} \end{aligned}\right\}$$ 1

and maximum volume is $V = \frac{4}{27}\pi h^3 \tan^2 \propto$ 1

27.



x coordinate of point of intersection is, $x = \frac{1}{2}$ 1

For Figure 1

Required area

$$= 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{x}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{3/2} \sqrt{\frac{9}{4} - x^2}\,dx\right)$$ 2

$$= 2\left[\frac{4}{3}x^{3/2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{9}{4} - x^2} + \frac{9}{8}\sin^{-1}\frac{2x}{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{3/2}\right]$$ $\frac{1}{2}+1$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{1}{3}\right) \quad \text{or} \quad \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{9}{4}\cos^{-1}\frac{1}{3}$$ $\frac{1}{2}$

28. Clearly required plane passes through point (8, –19, 10) and normal to plane is perpendicular to given lines so equation of plane is given by

$$\begin{vmatrix} x-8 & y+19 & z-10 \\ 3 & -16 & 7 \\ 3 & 8 & -5 \end{vmatrix} = 0$$ 3

$24(x - 8) + 36(y + 19) + 72(z - 10) = 0$ 2

or $2(x - 8) + 3(y + 19) + 6(z - 10) = 0$

whichi gives

$2x + 3y + 6z = 19$ 1

29. $n = 8,\ P = \frac{1}{2},\ \ q = \frac{1}{2}$ 1

(i) $P(X = 5) = 8C_5\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7}{32}$ $1\frac{1}{2}$

(ii) $P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$

$$= {}^8C_6\left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}^8C_7\left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}^8C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8$$ 2

$$= \frac{37}{256}$$ $\frac{1}{2}$

(iii) $P(X \leq 6) = 1 - [P(X = 7) + P(X = 8)]$

$$= 1 - \frac{9}{256} = \frac{247}{256}$$ 1

OR

Let X denote number of red cards drawn

X(xi)	P(X)	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$	
0	${}^3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{1}{8}$	0	0	
1	${}^3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	Correct table 4
2	${}^3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{12}{8}$	
3	${}^3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	

$$\text{mean} = \Sigma p_i x_i = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$ 1

$$\text{Variance} = \Sigma p_i x_i^2 - (\text{mean})^2$$

$$= 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$ 1

QUESTION PAPER CODE 65/1/2

EXPECTED ANSWER/VALUE POINTS

SECTION A

1. $\frac{dy}{dx} = \cos x$ $\frac{1}{2}$

Slope of tangent at (0, 0) is 1

Equation of tangent is y = x $\frac{1}{2}$

2. π 1

3. Order of AB is 3×4 1

4. Putting $(1 + \log x)$ or $\log x = t$ $\frac{1}{2}$

$\log |1 + \log x| + C$ $\frac{1}{2}$

SECTION B

5. Differentiating both sides w.r.t. x, we get

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a$$ 1

Eliminating 4a, we get

$$y^2 = 2y\frac{dy}{dx} \cdot x$$

or $$2xy\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$$ 1

6. Let number of large vans = x

and number of small vans = y

Minimize cost z = 400x + 200y $\frac{1}{2}$

Subject to constraints

$$\left.\begin{array}{l} 200x + 80y \geq 1200 \text{ or } 5x + 2y \geq 30 \\ x \leq y \\ 400x + 200y \leq 3000 \text{ or } 2x + y \leq 15 \end{array}\right\}$$ $1\frac{1}{2}$

$x \geq 0, y \geq 0$

7. $R_2 \to R_2 + R_1$ implies

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 17 & -7 \end{pmatrix}$$ 1+1

1 mark for pre matrix on LHS and 1 mar for matrix on RHS

8. Integrating factor is $e^{\int 2dx} = e^{2x}$ $\frac{1}{2}$

$\therefore$ Required solution is

$$y.e^{2x} = \int e^{3x} \cdot e^{2x} dx$$ $\frac{1}{2}$

$$y.e^{2x} = \frac{e^{5x}}{5} + C$$ 1

or $y = \dfrac{e^{3x}}{5} + Ce^{-2x}$

9. $\dfrac{dr}{dt} = -3$ cm/min, $\dfrac{dh}{dt} = 2$ cm/min $\frac{1}{2}$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left[r^2 \frac{dh}{dt} + 2hr\frac{dr}{dt}\right]$$ 1

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{at\ r = 9,\ h = 6} = -54\pi\ cm^3/min$$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Volume is decreasing at the rate 54π cm^3/min.

10. $11\hat{i} - 3\hat{j} = \dfrac{3(12\hat{i} + \mu\hat{j}) + 1(\lambda\hat{i} + 3\hat{j})}{4}$ 1

$44 = 36 + \lambda,\ -12 = 3\mu + 3$

$\lambda = 8,\ \mu = -5$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

11. Given integral becomes

$$\int \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx \qquad 1$$

$$= \frac{(x-1)}{2}\sqrt{2x-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}(x-1) + C \qquad 1$$

12. $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ $\qquad \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{4 \times 2\sin^2 2x}{4x^2} = p \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$p = 8 \qquad \frac{1}{2}$$

SECTION C

13. Let $\frac{x^2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ $\qquad 1$

$$A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2} \qquad 1\frac{1}{2}$$

Thus integral becomes

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{4}\log|x^2+1| + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C \qquad 1\frac{1}{2}$$

14. $\overrightarrow{AB} = \hat{i} + (x-3)\hat{j} + 4\hat{k}$

$\overrightarrow{AC} = \hat{i} - 3\hat{k}$

$\overrightarrow{AD} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ $\qquad 1\frac{1}{2}$

As A, B, C & D are coplanar

$$\left.\begin{array}{l} \therefore \quad \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = 0 \\ \text{i.e.} \quad \begin{vmatrix} 1 & x-3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right\} \qquad 1\frac{1}{2}$$

which gives

$$x = 6 \qquad 1$$

15. Given differential equation can be written as

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos\frac{y}{x} + x}{x\cos\frac{y}{x}} \qquad \text{....(i)} \qquad \frac{1}{2}$$

Clearly it is homogenous

Let $\frac{y}{x} = v, \ \frac{dy}{dx} = v + \frac{dv}{dx}$ 1

(1) becomes

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \sec v$$

$$\Rightarrow \quad \cos v \, dv = \frac{dx}{x} \qquad 1$$

integrating both sides we get

$$\sin v = \log|x| + C \qquad 1$$

$$\sin\frac{y}{x} = \log|x| + C \qquad \frac{1}{2}$$

16. Putting $x = \cos\theta$ 1

LHS becomes

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\cos\theta} - \sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta} + \sqrt{1-\cos\theta}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\cos\theta/2 - \sqrt{2}\sin\theta/2}{\sqrt{2}\cos\theta/2 + \sqrt{2}\sin\theta/2}\right) \qquad 1$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1-\tan\theta/2}{1+\tan\theta/2}\right) \qquad 1$$

$$= \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \qquad \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x = \text{RHS} \qquad \frac{1}{2}$$

17. Taking x, y, z common from C_1, C_2, C_3 respectively, we get

$$xyz\begin{vmatrix} a/x & b/y-1 & c/z-1 \\ a/x-1 & b/y & c/z-1 \\ a/x-1 & b/y-1 & c/z \end{vmatrix} = 0$$ 1

$C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$

$$\begin{vmatrix} a/x+b/y+c/z-2 & b/y-1 & c/z-1 \\ a/x+b/y+c/z-2 & b/y & c/z-1 \\ a/x+b/y+c/z-2 & b/y-1 & c/z \end{vmatrix} = 0$$ 1

$$\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}-2\right)\begin{vmatrix} 1 & b/y-1 & c/z-1 \\ 1 & b/y & c/z-1 \\ 1 & b/y-1 & c/z \end{vmatrix} = 0$$ $\frac{1}{2}$

$R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1$

$$\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}-2\right)\begin{vmatrix} 1 & b/y-1 & c/z-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ 1

$\therefore \quad \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}-2\right)\cdot 1 = 0 \Rightarrow \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} = 2$ $\frac{1}{2}$

OR

We know that

$IA = A$ 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$ 1

$R_2 \to \frac{R_2}{-5}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ $\frac{1}{2}$

$R_1 \to R_1 - 2R_2$

$$\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 1

$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{2}$

Full marks for finding correct A^{-1} using column transformations with $AI = A$

18. Differentiating $y = \cos(x + y)$ wrt x we get

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$$ 1

Slope of given line is $\frac{-1}{2}$ $\frac{1}{2}$

As tangent is parallel to line $x + 2y = 0$

$$\therefore \quad \frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)} = \frac{-1}{2}$$

$\Rightarrow \quad \sin(x + y) = 1$

$\Rightarrow \quad x + y = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}, n \in Z$ ...(1) 1

Putting (1) in $y = \cos(x + y)$

we get $y = 0$

$\Rightarrow \quad x = n\pi + (-1)^n \pi/2, n \in Z$

$x = \frac{-3\pi}{2} \in [-2\pi, 0]$ $\frac{1}{2}$

$\therefore$ Required equation of tangent is

$$y = \frac{-1}{2}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

or $\quad 2y + x + \frac{3\pi}{2} = 0$ 1

19. Given equation of lines can be written as

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2p/7} = \frac{z-3}{1} \qquad \ldots(1) \qquad 1$$

$$\frac{x-1}{-3p/7} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-11}{-7} \qquad \ldots(2) \qquad 1$$

(1) & (2) are perpendicular

So $-3\left(\frac{-3p}{7}\right) + \frac{2p}{7}(-1) + 1(-7) = 0$ 1

which gives p = 7 1

OR

Required equation of plane is $x + y + z - 1 + \lambda(2x + 3y + 4z - 5) = 0$ for some λ. 1

i.e. $(1 + 2\lambda)x + (1 + 3\lambda)y + (1 + 4\lambda)z = 1 + 5\lambda$

according to question

$$2\left(\frac{1+5\lambda}{1+3\lambda}\right) = 3\left(\frac{1+5\lambda}{1+4\lambda}\right) \qquad 1$$

Solving we get $\lambda = -1$ 1

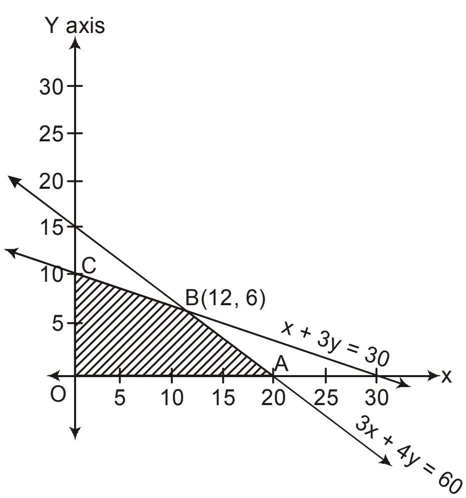
Thus the equation of required plane is

$-x - 2y - 3z = -4$

or $x + 2y + 3z = 4$ 1

20. **Correct lines** 2

Correct shading 1



Corner points	Value of Z	
O(0, 0)	0	
A(20, 0)	160000	
B(12, 6)	168000 → max	$\frac{1}{2}$
C(0, 10)	120000	

Maximum Z = 168000

at x = 12, y = 6 $\frac{1}{2}$

21. Given integral $= \int \frac{x+7}{(3x+4)(x+7)}\,dx$ 2

$= \int \frac{1}{3x+4}\,dx$

$= \frac{1}{3}\log|3x+4| + C$ 2

22. $\frac{dx}{dt} = -3\,\text{sint} + 6\cos^2 t\,\text{sint}$

$= +3\,\text{sint}\,\cos 2t$ $1\frac{1}{2}$

$\frac{dy}{dt} = 3\text{cost} - 6\sin^2 t - \text{cost}$

$= 3\text{cost}\,\cos 2t$ 1

$\frac{dy}{dx} = \cot t$ $\frac{1}{2}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\text{cosec}^2 t\,\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{3}\frac{\text{cosec}^3 t}{\cos 2t}$ 1

23. E_1: Student selected from category A

E_2: Student selected from category B

E_3: Student selected from category C

S: Student could not get good marks

$P(E_1) = \frac{1}{6} \quad P(E_2) = \frac{3}{6} \quad P(E_3) = \frac{2}{6}$ 1

$P(S/E_1) = 0.002\ P(S/E_2) = 0.02,\ P(S/E_3) = 0.2$

$$P(E_3/S) = \frac{P(E_3)\,P(S/E_3)}{P(E_1)\,P(S/E_1) + P(E_2)\,P(S/E_2) + P(E_3)\,P(S/E_3)}$$

$$= \frac{\frac{2}{6}\times 0.2}{\frac{1}{6}\times .002 + \frac{3}{6}\times .02 + \frac{2}{6}\times 0.2}$$ 1

$= \frac{200}{231}$ 1

Value: Hardwork and Regularity 1

SECTION D

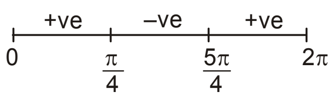
24. $f(x) = \sin x + \cos x \qquad 0 \le x \le 2\pi$

$f'(x) = \cos x - \sin x$ 1

$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x$ 1

$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ 1

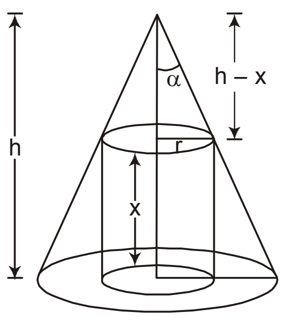
Sign of $f^1(x)$



2

So f(x) is strictly increasing in $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$ and strictly decreasing in $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ 1

OR



For Figure 1

$\frac{r}{h-x} = \tan \alpha$ 1

$r = (h-x) \tan \alpha$

Volume of cylinder

$V = \pi r^2 x$

$V = \pi (h-x)^2 x \tan^2 \alpha$ $\frac{1}{2}$

$\frac{dV}{dx} = \pi \tan^2 (h-x)(h-3x)$

$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow h = x \text{ or } h = 3x$

i.e. $x = \frac{h}{3}$ $1\frac{1}{2}$

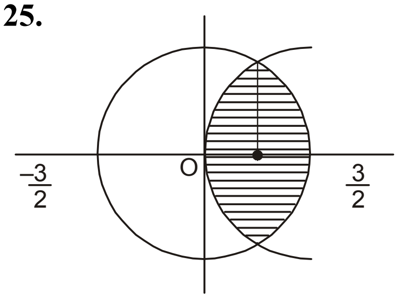
$$\frac{d^2V}{dx^2} = \pi\tan^2\alpha\,(6x - 4h)$$

$$\therefore \quad \frac{d^2V}{dx^2} < 0 \quad \text{at} \quad x = \frac{h}{3}$$ 1

$$\therefore \quad \text{V is maximum at } x = \frac{h}{3}$$

and maximum volume is $V = \frac{4}{27}\pi h^3 \tan^2 \propto$ 1

25.



x coordinate of point of intersection is, $x = \frac{1}{2}$ 1

For Figure 1

Required area

$$= 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{x}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{3/2} \sqrt{\frac{9}{4} - x^2}\,dx\right)$$ 2

$$= 2\left[\frac{4}{3}x^{3/2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{9}{4} - x^2} + \frac{9}{8}\sin^{-1}\frac{2x}{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{3/2}\right]$$ $\frac{1}{2}+1$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{1}{3}\right) \quad \text{or} \quad \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{9}{4}\cos^{-1}\frac{1}{3}$$ $\frac{1}{2}$

26. $n = 8,\ P = \frac{1}{2},\ \ q = \frac{1}{2}$ 1

(i) $P(X = 5) = 8C_5\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7}{32}$ $1\frac{1}{2}$

(ii) $P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$

$$= {}^8C_6\left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}^8C_7\left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}^8C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8$$ 2

$$= \frac{37}{256}$$ $\frac{1}{2}$

(iii) $P(X \le 6) = 1 - [P(X = 7) + P(X = 8)]$

$$= 1 - \frac{9}{256} = \frac{247}{256}$$ 1

OR

Let X denote number of red cards drawn

X(xi)	P(X)	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	${}^3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{1}{8}$	0	0
1	${}^3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
2	${}^3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{12}{8}$
3	${}^3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$

Correct table 4

$$\text{mean} = \Sigma p_i x_i = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$ 1

$$\text{Variance} = \Sigma p_i x_i^2 - (\text{mean})^2$$

$$= 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$ 1

27. For one-one

Let $x_1, x_2 \in R - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ such that

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4x_1}{3x_1 + 4} = \frac{4x_2}{3x_2 + 4}$$

$$\Rightarrow \quad 12\cancel{x_1}x_2 + 16x_1 = 12\cancel{x_1}x_2 + 16x_2$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

$\therefore$ f is one-one 3

Clearly f: $R - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \rightarrow$ Range f is onto 1

Let $f(x) = y$

i.e. $\frac{4x}{3x+4} = y$

$\Rightarrow \quad x = \frac{4y}{4-3y}$ 1

So f^{-1}: Range $f \rightarrow R - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ is

$f^{-1}(y) = \frac{4y}{4-3y}$ 1

OR

$(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$

$(c, d) * (a, b) = (c + a, d + b)$

$(a, b) * (c, d) = (c, d) * (a, b)$

$\therefore$ * is commutative 2

$((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (a + c, b + d) * (e, f) = (a + c + e, b + d + f)$

$(a, b) * ((c, d) * (e, f)) = (a, b) * (c + e, d + f) = (a + c + e, b + d + f)$

As $((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (a, b) * ((c, d) * (e, f))$

$\therefore$ * is associative 2

Let (e_1, e_2) be identity

$(a, b) * (e_1, e_2) = (a, b)$

$(a + e_1, b + e_2) = (a, b)$

$e_1 = 0, e_2 = 0$

$(0, 0) \in R \times R$ is the identity element. 2

28. Clearly order of X is 3×2 1

Let $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ 1

So $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 11 & 10 & 9 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{matrix} a+4b=-7 & c+4d=2 & e+4f=11 \\ 2a+5b=-8 & 2c+5d=4 & 2e+5f=10 \end{matrix}\right\}$$ 2

Solving we get

$a = 1, \quad b = -2, \quad c = 2, \quad d = 0, \quad e = -5 \quad f = 4$ 1

Thus $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

29. Consider $\begin{vmatrix} -1+3 & 2-1 & 5-5 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ 2

$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$ 1

$\therefore$ Lines are coplanar.

Equation of plane is given by

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z-5 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$ 2

Which gives

$-x + 2y - 3 = 0$ or $x - 2y + z = 0$ 1

QUESTION PAPER CODE 65/1/3

EXPECTED ANSWER/VALUE POINTS

SECTION A

1. π 1

2. Order of AB is 3×4 1

3. $\frac{dy}{dx} = \cos x$ $\frac{1}{2}$

Slope of tangent at (0, 0) is 1

Equation of tangent is $y = x$ $\frac{1}{2}$

4. Putting $(1 + \log x)$ or $\log x = t$ $\frac{1}{2}$

$\log|1 + \log x| + C$ $\frac{1}{2}$

SECTION B

5. Let A be $10\hat{i} + 3\hat{j}$, B be $12\hat{i} - 5\hat{j}$, C be $\lambda\hat{i} + 11\hat{j}$

$\overrightarrow{AB} = 2\hat{i} - 8\hat{j}$ $\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{AC} = (\lambda - 10)\hat{i} + 8\hat{j}$ $\frac{1}{2}$

As $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AC}$ are collinear

$\frac{2}{\lambda - 10} = \frac{-8}{8}$ $\frac{1}{2}$

So $\lambda = 8$ $\frac{1}{2}$

6. Let number of large vans = x

and number of small vans = y

Minimize cost $z = 400x + 200y$ $\frac{1}{2}$

Subject to constraints

$$\left.\begin{aligned} &200x + 80y \geq 1200 \text{ or } 5x + 2y \geq 30 \\ &x \leq y \\ &400x + 200y \leq 3000 \text{ or } 2x + y \leq 15 \end{aligned}\right\} \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

7. $R_2 \to R_2 + R_1$ implies

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 17 & -7 \end{pmatrix} \qquad 1+1$$

1 mark for pre matrix on LHS and 1 mar for matrix on RHS

8. $\frac{dr}{dt} = -3$ cm/min, $\frac{dh}{dt} = 2$ cm/min $\qquad \frac{1}{2}$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left[r^2\frac{dh}{dt} + 2hr\frac{dr}{dt}\right] \qquad 1$$

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{\text{at } r=9,\, h=6} = -\,54\pi \text{ cm}^3/\text{min} \qquad \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Volume is decreasing at the rate 54π cm^3/min.

9. Differentiating both sides w.r.t. x, we get

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a \qquad 1$$

Eliminating 4a, we get

$$y^2 = 2y\frac{dy}{dx}\cdot x$$

or $\quad 2xy\frac{dy}{dx} - y^2 = 0 \qquad 1$

10. $\lim_{x\to\pi/4} f(x) = f(\pi/4)$

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{\sqrt{2}\sin(x-\pi/4)}{4(x-\pi/4)} = k \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad k = \frac{\sqrt{2}}{4} \qquad \frac{1}{2}$$

11. Given integral $= \int \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2 - 2^2}} dx$ 1

$$= \frac{(x-2)}{2}\sqrt{x^2 - 4x} - 2\log|x - 2 + \sqrt{x^2 + 4x}| + C$$ 1

12. Integrating factor is $e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$ $\frac{1}{2}$

Solution is $y.x^2 = \int x \cdot x^2 dx + C$ $\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned} y \cdot x^2 &= \frac{x^4}{4} + C \\ \text{or} \quad y &= \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2} \end{aligned}\right\}$$ 1

SECTION C

13. $\frac{dx}{d\theta} = a(-\sin\theta + \theta\cos\theta + \sin\theta)$

$= a\,\theta\cos\theta$ $1\frac{1}{2}$

$\frac{dy}{d\theta} = a(\cos\theta - \cos\theta + \theta\sin\theta)$

$= a\,\theta\sin\theta$ 1

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \tan\theta$ $\frac{1}{2}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{\sec^3\theta}{a\theta}$ 1

14. Differentiating $y = \cos(x+y)$ wrt x we get

$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$ 1

Slope of given line is $\frac{-1}{2}$ $\frac{1}{2}$

As tangent is parallel to line $x + 2y = 0$

$$\therefore \quad \frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)} = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(x+y) = 1$$

$$\Rightarrow \quad x + y = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}, n \in Z \qquad ...(1)$$ 1

Putting (1) in $y = \cos(x + y)$

we get $y = 0$

$$\Rightarrow \quad x = n\pi + (-1)^n \pi/2, n \in Z$$

$$x = \frac{-3\pi}{2} \in [-2\pi, 0]$$ $\frac{1}{2}$

$\therefore$ Required equation of tangent is

$$y = \frac{-1}{2}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

or $$2y + x + \frac{3\pi}{2} = 0$$ 1

15. Let $\frac{x^2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ 1

$$A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}$$ $1\frac{1}{2}$

Thus integral becomes

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{4}\log|x^2+1| + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$ $1\frac{1}{2}$

16. Given differential equation can be written as

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos\frac{y}{x} + x}{x\cos\frac{y}{x}} \qquad ....(i)$$ $\frac{1}{2}$

Clearly it is homogenous

Let $\frac{y}{x} = v, \frac{dy}{dx} = v + \frac{dv}{dx}$ 1

(1) becomes

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \sec v$$

$\Rightarrow \quad \cos v \, dv = \frac{dx}{x}$ 1

integrating both sides we get

$\sin v = \log|x| + C$ 1

$\sin\frac{y}{x} = \log|x| + C$ $\frac{1}{2}$

17. $\overrightarrow{AB} = \hat{i} + (x-3)\hat{j} + 4\hat{k}$

$\overrightarrow{AC} = \hat{i} - 3\hat{k}$

$\overrightarrow{AD} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ $1\frac{1}{2}$

As A, B, C & D are coplanar

$\therefore \quad \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}) = 0$

i.e. $\begin{vmatrix} 1 & x-3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$ $1\frac{1}{2}$

which gives

$x = 6$ 1

18. Given equation of lines can be written as

$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2p/7} = \frac{z-3}{1}$ ...(1) 1

$\frac{x-1}{-3p/7} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-11}{-7}$ ...(2) 1

(1) & (2) are perpendicular

So $\quad -3\left(\frac{-3p}{7}\right)+\frac{2p}{7}(-1)+1(-7) = 0$ 1

which gives p = 7 1

OR

Required equation of plane is $x + y + z - 1 + \lambda(2x + 3y + 4z - 5) = 0$ for some λ. 1

i.e. $\quad (1 + 2\lambda)x + (1 + 3\lambda)y + (1 + 4\lambda)z = 1 + 5\lambda$

according to question

$$2\left(\frac{1+5\lambda}{1+3\lambda}\right) = 3\left(\frac{1+5\lambda}{1+4\lambda}\right)$$ 1

Solving we get $\lambda = -1$ 1

Thus the equation of required plane is

$$-x - 2y - 3z = -4$$

or $\quad x + 2y + 3z = 4$ 1

19. Taking x, y, z common from C_1, C_2, C_3 respectively, we get

$$xyz\begin{vmatrix} a/x & b/y-1 & c/z-1 \\ a/x-1 & b/y & c/z-1 \\ a/x-1 & b/y-1 & c/z \end{vmatrix} = 0$$ 1

$C_1 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3$

$$\begin{vmatrix} a/x+b/y+c/z-2 & b/y-1 & c/z-1 \\ a/x+b/y+c/z-2 & b/y & c/z-1 \\ a/x+b/y+c/z-2 & b/y-1 & c/z \end{vmatrix} = 0$$ 1

$$\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}-2\right)\begin{vmatrix} 1 & b/y-1 & c/z-1 \\ 1 & b/y & c/z-1 \\ 1 & b/y-1 & c/z \end{vmatrix} = 0$$ $\frac{1}{2}$

$R_2 \to R_2 - R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$

$$\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}-2\right)\begin{vmatrix}1 & b/y-1 & c/z-1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0$$ 1

$\therefore \quad \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}-2\right)\cdot 1 = 0 \Rightarrow \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} = 2$ $\frac{1}{2}$

OR

We know that

$IA = A$ 1

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_1$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -5\end{pmatrix}$$ 1

$R_2 \to \frac{R_2}{-5}$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2/5 & -1/5\end{pmatrix}A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$ $\frac{1}{2}$

$R_1 \to R_1 - 2R_2$

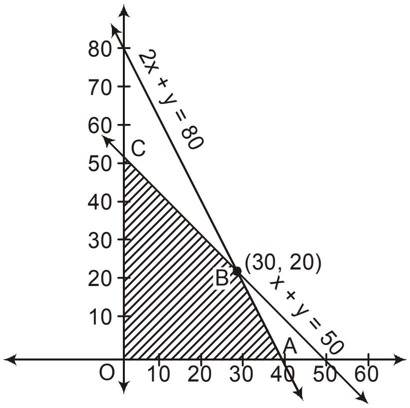
$$\begin{pmatrix}1/5 & 2/5\\ 2/5 & -1/5\end{pmatrix}A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$ 1

$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix}1/5 & 2/5\\ 2/5 & -1/5\end{pmatrix}$ $\frac{1}{2}$

Full marks for finding correct A^{-1} using column transformations with $AI = A$

20. **Correct lines** 1

Correct shading 1



Corner points	Value of Z	
O(0 , 0)	0	
A(40, 0)	4200	
B(30, 20)	4950 maximum	$\frac{1}{2}$
C(0, 50)	4500	

Maximum Z = 4950

at x = 30, y = 20 $\quad \frac{1}{2}$

21. Let $x + 3 = A(2x - 4) + B$

which gives $A = \frac{1}{2},\ \ B = 5$ 1

Given integral becomes

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{\sqrt{5-4x+x^2}}dx + 5\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}} \qquad 1$$

$$= \sqrt{5-4x+x^2} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+1^2}} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{5-4x+x^2} + 5\log\left|x-2+\sqrt{5-4x+x^2}\right| + C \qquad 1$$

22. LHS becomes

$$\cot^{-1}\left[\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)+\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)-\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}\right] \qquad 2$$

$$= \cot^{-1}\left[\frac{2\cos x/2}{2\sin x/2}\right] \qquad 1$$

$$= \cot^{-1}\cot\frac{x}{2}$$

$$= \frac{x}{2} \qquad 1$$

23. E_1: Student selected from category A

E_2: Student selected from category B

E_3: Student selected from category C

S: Student could not get good marks

$P(E_1) = \frac{1}{6} \quad P(E_2) = \frac{3}{6} \quad P(E_3) = \frac{2}{6}$ 1

$P(S/E_1) = 0.002\ P(S/E_2) = 0.02,\ P(S/E_3) = 0.2$

$$P(E_3/S) = \frac{P(E_3)\,P(S/E_3)}{P(E_1)\,P(S/E_1) + P(E_2)\,P(S/E_2) + P(E_3)\,P(S/E_3)}$$

$$= \frac{\frac{2}{6} \times 0.2}{\frac{1}{6} \times .002 + \frac{3}{6} \times .02 + \frac{2}{6} \times 0.2}$$ 1

$$= \frac{200}{231}$$ 1

Value: Hardwork and Regularity 1

SECTION D

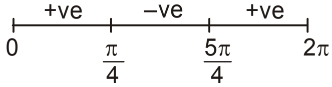
24. $f(x) = \sin x + \cos x \qquad 0 \le x \le 2\pi$

$f'(x) = \cos x - \sin x$ 1

$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x$ 1

$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ 1

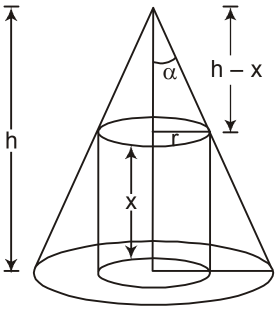
Sign of $f^1(x)$



2

So f(x) is strictly increasing in $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$ and strictly decreasing in $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ 1

OR



For Figure 1

$$\frac{r}{h-x} = \tan\alpha$$ 1

$$r = (h-x)\tan\alpha$$

Volume of cylinder

$$V = \pi r^2 x$$

$$V = \pi(h-x)^2 x \tan^2\alpha$$ $\frac{1}{2}$

$$\frac{dV}{dx} = \pi\tan^2 (h-x)(h-3x)$$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow h = x \text{ or } h = 3x$$

i.e. $x = \frac{h}{3}$ $1\frac{1}{2}$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \pi\tan^2\alpha\,(6x-4h)$$

$\therefore$ $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$ at $x = \frac{h}{3}$

$\therefore$ V is maximum at $x = \frac{h}{3}$ 1

and maximum volume is $V = \frac{4}{27}\pi h^3 \tan^2 \propto$ 1

25. $n = 8,\ P = \frac{1}{2},\ \ q = \frac{1}{2}$ 1

(i) $P(X=5) = 8C_5\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7}{32}$ $1\frac{1}{2}$

(ii) $P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$

$$= {}^8C_6\left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}^8C_7\left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}^8C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8$$ 2

$$= \frac{37}{256}$$ $\frac{1}{2}$

(iii) $P(X \leq 6) = 1 - [P(X = 7) + P(X = 8)]$

$$= 1 - \frac{9}{256} = \frac{247}{256}$$ 1

OR

Let X denote number of red cards drawn

X(xi)	P(X)	p_i	p_ix_i	$p_ix_i^2$
0	${}^3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{1}{8}$	0	0
1	${}^3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
2	${}^3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{12}{8}$
3	${}^3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$

Correct table 4

$$\text{mean} = \Sigma p_i x_i = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$ 1

$$\text{Variance} = \Sigma p_i x_i^2 - (\text{mean})^2$$

$$= 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$ 1

26. For one-one

Let $x_1, x_2 \in R - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ such that

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{4x_1}{3x_1+4} = \dfrac{4x_2}{3x_2+4}$

$\Rightarrow \quad 12\cancel{x_1}x_2 + 16x_1 = 12\cancel{x_1}x_2 + 16x_2$

$\Rightarrow \quad x_1 = x_2$

$\therefore$ f is one-one 3

Clearly f: $R - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\} \to$ Range f is onto 1

Let f(x) = y

i.e. $\dfrac{4x}{3x+4} = y$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{4y}{4-3y}$ 1

So f^{-1}: Range f $\to R - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$ is

$f^{-1}(y) = \dfrac{4y}{4-3y}$ 1

OR

(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)

(c, d) * (a, b) = (c + a, d + b)

(a, b) * (c, d) = (c, d) * (a, b)

$\therefore$ * is commutative 2

((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (a + c, b + d) * (e, f) = (a + c + e, b + d + f)

(a, b) * ((c, d) * (e, f)) = (a, b) * (c + e, d + f) = (a + c + e, b + d + f)

As ((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (a, b) * ((c, d) * (e, f))

$\therefore$ * is associative 2

Let (e_1, e_2) be identity

$(a, b) * (e_1, e_2) = (a, b)$

$(a + e_1, b + e_2) = (a, b)$

$e_1 = 0, e_2 = 0$

$(0, 0) \in R \times R$ is the identity element. 2

27. Clearly order of A is 2×3 1

Let $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ 1

So $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$

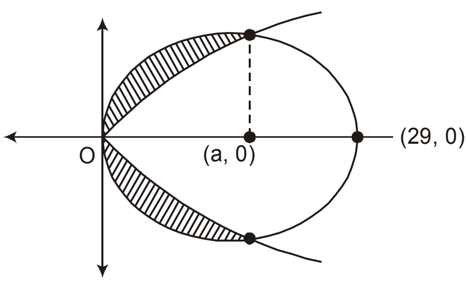
gives

$$\left.\begin{array}{l} 2a - d = -1,\ 2b - e = -8,\ 2c - f = -10 \\ a = 1,\ b = -2,\ c = -5 \end{array}\right\}$$ 2

$\Rightarrow$ $d = 3, e = 4, f = 0$ 1

Thus $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ 1

28. **Correct figure** 1



x-coordinate of point of intersection is, $x = a$ 1

Required area $= 2\left[\int_0^a \left(\sqrt{a^2 - (x-a)^2} - \sqrt{a}\sqrt{x}\right)dx\right]$ 2

$$= 2\left[\frac{x-a}{2}\sqrt{a^2 - (x-a)^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x-a}{a} - 2\sqrt{a}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^a$$ 1

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}\right)a^2$$ 1

29. Required equation of plane is given by

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ 3

$\Rightarrow$ $(x+1)(-7) - (y-3)(-8) + (z-2)(-3) = 0$ 2

$\Rightarrow$ $-7x + 8y - 3z = 25$ 1

or $7x - 8y + 3z + 25 = 0$